图论问题在中学数学教学中的若干应用

刘聪敏 [1]，马僎龙 [2,*]

[1] 陕西师范大学御锦城小学，陕西西安 710038

[2] 西安石油大学理学院，陕西西安 710065

[*]通信作者：马僎龙, xuanlma@xsyu.edu.cn

摘要： 在中学数学中，部分教学内容体现了一种“数图结合”的教学思想，尤其是在中学数学中的几何部分。因此，在实际课堂教学中，教师应结合数与图，用直观生动的图形引导学生学习和探索一些实际数学问题。图论是离散数学的一个分支，它以图为研究对象。图论中的图是由若干点及连接两点的边所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系。在图中点代表事物，边用来表示所连接的点之间具有的特定关系。在历史上图论的产生解决了许多数学问题，尤其是一些看起来简单，但用传统数学方法难以解决的问题。图论的方法在中学数学中有非常广泛的应用，特别是在中学数学竞赛中。本文探讨了图论的基本思想方法在中学数学中的一些应用。首先通过生活中的两个具体问题引入图论，接下来探究了图论中的拉姆塞数问题、二部图及匹配问题在中学数学教学中的若干应用。

关键词： 中学数学；图论；拉姆塞数；二部图；匹配

DOI: 10.57237/j.edu.2022.01.002

Some Applications of Graph Theory in Middle School Mathematics Teaching

Liu Congmin[1], Ma Xuanlong[2,*]

[1]Shaanxi Normal University La Botanica Primary School, Xi'an 710038, China

[2]School of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065, China

[*]Corresponding author: Ma Xuanlong, xuanlma@xsyu.edu.cn

Abstract: In middle school mathematics, some teaching contents embody a teaching idea of "combination of numbers and graphs", especially in the geometry part of middle school mathematics. Therefore, in the actual process of teaching, teachers should combine numbers and graphs to guide students to learn and explore some practical mathematical problems with intuitive and vivid graphics. Graph theory is a branch of discrete mathematics, which takes graph as its research object. A graph in graph theory is a graph composed of some vertices and edges connecting two vertices. This graph is usually used to describe a specific relationship between certain things. In a graph, a vertex represents a thing, and edges are used to represent specific relationships between connected two vertices. In the history of graph theory, the emergence of graph theory has solved many mathematical problems, especially some seemingly simple problems that are difficult to solve with traditional mathematical methods. The method of graph theory is widely used in middle school mathematics, especially in middle school mathematics competitions. This paper discusses some applications of graph theory in middle school mathematics. We first introduces graph theory through two specific problems in life, and then explores some applications of Ramsey number problem, bipartite graph and matching problem of graph theory in middle school mathematics teaching.

收稿日期: 2022-08-31；接受日期: 2022-10-11；在线出版日期: 2022-10-27

Keywords: Middle School Mathematics; Graph Theory; Ramsey Number; Bipartite Graph; Matching

1 引言

在 18 世纪初期，有一条河穿过普鲁士的哥尼斯堡（加里宁格勒的旧称），该河上有两座小岛且有七座桥连接这两个岛和河岸。有人提出了问题（七桥问题）：一位旅行者如何不重复且不遗漏地一次性走完这七座桥，最终恰好回到出发点。著名数学家欧拉（Euler，1707-1783）把该问题转换成了图论问题，即后来的欧拉图问题，俗称“一笔画”问题。在 1736 年，欧拉发表的一篇论文中解决了著名的七桥问题，后来人们通常认为该论文是图论的第一篇论文，这也开创了数学的一个新分支--图论。在欧拉的论文中，他不仅完整地解决了七桥问题，而且给出了连通图可以一笔画的充要条件：奇数度顶点的个数不是 0 个就是 2 个。自此以后，图论成为了一个热门研究课题，图论及其应用也得到了迅速发展。

简单的来说，由若干个点（顶点）及点之间的线（边）构成的图形称为是图（Graph），特别地，是一个无向图。正式来说，令G是一个图，用V和E分别表示该图的顶点集和边集，这时该图也被记为$G=\langle V,E\rangle$[1]。有时候，一个顶点自己到自己也可能出现边（自环），或者两个顶点之间可以有两条边（重边）。本文所考虑的图均为简单图，即没有重边和自环的无向图。如果V的一个子集U中任意两个顶点在G中都不相连，则称U为G的一个独立集（Independent Set）。如果U中的任两个顶点之间均有边，则称U为G的一个完全集（Complete Set）或团（Clique）。特别地，如果V中的任意两个顶点之间有边，则称G是一个完全图（Complete Graph）。设v是G的一个顶点，与v相连的边的个数称为v的度数（Degree），与v相连的顶点的集合称为v的邻域（Neighbourhood）。

如果$\varnothing\neq F\subseteq E$且$F$中任意两条边均不相邻（即没有公共端点且在$G=\langle V,E\rangle$中不存在边连接它们），则称$F$为$G$的一个匹配（Matching）。特别地，如果$G$中的顶点全部出现在$F$，则称$F$为$G$的一个完美匹配（Perfect Matching）。一个图被称为$k-$正则的，如果这个图中每个顶点的度数均为k。设$V=V_1\cup V_2$是V的不交并，如果G中任一条边的两端点不能同时出现在V_1或V_2中，则称G是一个二部图（Bipartite Graph），其划分集为V_1和V_2。

图论无论是在基础数学还是在应用数学中都是一个非常重要的分支，并且在化学、计算机技术、工程等领域都有广泛的应用。在这些领域中出现的一些问题，事实上都可以利用图论的相关知识解决，究其原因是图论可以直观地建立数学模型来解决相关问题。近年来，图论在中学数学及中学数学竞赛中的应用得到了广泛关注，如乔友付探究了图论在数学竞赛中的应用，包括度问题、平面图等[2]。陈丽娟探究了二部图、哈密尔顿图、圈及路在中学数学竞赛中的若干应用[3]。郭梦夏探讨了数学竞赛中应用图论知识的重要意义及如何在数学竞赛中怎样更好地应用图论[4]。图论方法在数学建模中的若干应用在文献[5-8]中被研究了。文献[9-12]探讨了图论的一些经典方法在中学数学中的应用。学者陈子今研究了如何运用图论技巧解决实际生活中问题[13]。姚寒青研究了反证法在图论中的若干应用[14]。在文献[15]中，初中数学中的“最短路问题”被研究了。刘勍综述了由图论中经典的“七桥问题”发展起来的数学分支与数学方法[16]。

本文介绍了图论的基本思想方法在中学数学中的一些应用。首先通过生活中的两个具体问题引入图论知识，然后利用图论知识解决这些问题。接下来本文介绍了拉姆塞（Ramsey）数问题、二部图及匹配问题在中学数学中的应用。

2 生活中的图论问题

理论问题一定是来源于实际问题的，本小节将利用图论知识来解决生活中两个常见问题。要想利用图论知识，首先应该考虑如何把实际问题转化为图论问题，即用图论语言描述问题，然后再利用图论的相关知识来方便的解决这些问题。从而彰显了图论工具的强大作用，也体现了图论的重要性。首先看下面的例子：

例 1：假设现有$2n$（$n\geq 2$）个人参加聚会，其中每个人至少跟$2n$个人中的n个人认识。证明：这$2n$个人中至少可以找到 4 个人，使得这 4 个人围成一圈且相邻的两人都认识。

分析：如果直接考虑该问题，感觉无从下手，即使是考虑$n=2$的情况，给解题者的感觉是“感觉很简单、

操作很复杂”。事实上，画图是很多人都会想到的方法。如果解题者接触过图论思想及简单相关知识后，该题很容易被证明。

证明：将 $2n$ 个人看做图中的顶点，两个点之间有边当且仅当对应的这两个人认识，这样可以构造出一个图。假设这 $2n$ 个人均相互认识，即构造的图是完全图，则当然可以找到 4 个人（任意 4 个人），使得这 4 个人围成一圈且相邻的两人都认识，命题已证。因此，接下来可以假设另外一种情况，即这 $2n$ 个人中存在两个人相互不认识，不妨设这两个人为 a,b。考虑到每个人至少跟 $2n$ 个人中的 n 个人认识，于是下面的图能得到：

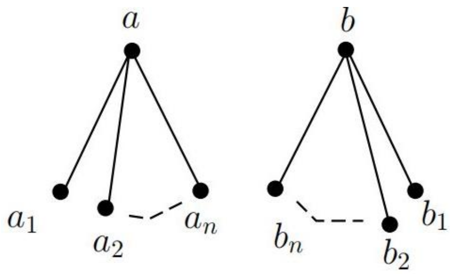

图 1 找圈问题

注意到共有 $2n$ 个人，因此可知

$$|\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\cap\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}|\geq 2。$$

现在取不同的

$$x,y\in\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}\cap\{b_1,b_2,\ldots,b_n\},$$

让 a,x,b,y 这 4 个人按照 $a\to x\to b\to y\to a$ 顺序围成一圈的话将满足需要的条件，证完。

接下来看另外一个例子：

例 2：证明在至少有 2 个人的人群中，至少有 2 个人他们有相同的朋友数。

分析：当解题者接触了图论思想之后，自然地，选择用图论的方法解决该问题。如果用顶点表示人，朋友关系用边来描述，则 2 个人有相同的朋友数当且仅当存在两 2 个顶点使得他们具有相同的度数。

证明：假设有 n 个人构成的集合为 $V=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，其中 $n\geq 2$。现在构造一个简单图 $G=\langle V,E\rangle$，其中 $E=\{\{a_i,a_j\}\mid i\neq j\text{且}a_i\text{与}a_j\text{是朋友}\}$。

下面分三种情况证明：

情况 1：图 G 有至少两个孤立点（度数为 0 的顶点，即跟任何其他人均不是朋友的人）。选择两个孤立点，因此这两个孤立点代表的人当然有相同的朋友数，证完。

情况 2：图 G 只有一个孤立点，不妨设为 a_1。显然，在这种情况下 G 中至少有三个顶点。考虑剩下的 $n-1$ 个顶点 $\{a_2,\ldots,a_n\}$，这些顶点中没有孤立点。于是这 $n-1$ 个顶点在 G 中的度数可能为 $1,2,3,\ldots,n-2$，即共有 $n-2$ 个选择。于是根据抽屉原理可知，在这 $n-1$ 个顶点中，必有两个顶点的度相同，证完。

情况 3：图 G 中没有孤立点。则图 G 中的任意一个顶点的度数的可能值为 $1,2,3,\ldots,n-2,n-1$，即共有 $n-1$ 个选择。注意共有 n 个顶点，则根据抽屉原理可知，必有两个顶点的度相同，证完。

从上面的两个例子可以看出，对于一些中学数学中的看似简单，但是又不容易证明的命题，如果采用图论方法去考虑，能得到意想不到的效果。接下来本文介绍两类常见且有趣的图论问题。

3 拉姆塞数问题

定义 $R(s,t)$ 为最小整数，使得在任意 $R(s,t)$ 个人中，要么有 s 个人两两认识，要么有 t 个人两两不认识。拉姆塞(Ramsey)数问题是指：给定具体的数 s,t，求 $R(s,t)$。事实上，一般来说要求该数是非常困难的，目前已知：$R(3,3)=6, R(4,4)=18$，然而对于 $R(5,5)$ 仍然是未知的。

如果在现实生活中考虑拉姆塞数问题，则能产生一些有趣的问题。下面的题目最初来源于 1958 年 6 月出版的著名数学杂志《美国数学月刊》（American Mathematical Monthly）上。

例 3：在任意 6 个人中，证明要么有 3 个人相互认识，要么有 3 个人相互不认识。

分析：事实上，该问题属于图论中的拉姆塞（Ramsey）数问题，这样的问题也经常出现在竞赛数学中，如果按照常规的方法解基本上是无法解决的。接下来，利用初等图论知识，本文将给出上述问题的一个通俗易懂的证明过程。

证明：首先构造图模型：把任意 6 人看成 6 个无顺序的顶点，一般用黑色实点表示，其中两个顶点之间有边当且仅当这两个顶点所对用的两个人认识。于是要证明该结论，只需要证明通过上述方法构造的图中要么出现一个三角形（用图论术语讲，三角形就是一个大小为 3 的团），要么出现相互之间均没有边的三个顶点(用图论术语讲就是一个大小为 3 的独立集)。

为了方便，用 $a_1,a_2,\ldots,a_6$ 表示这任意 6 人。然后选定

a_1，考虑 a_1 与其它 5 个人之间的关系，当然他们之间的关系要么是认识，要么是不认识，即在图上表现为要么有边连接他们，要么他们之间没有边。根据抽屉原理（或鸽笼原理）可知，在 $a_2,\ldots,a_6$ 这 5 个人中要么有 3 人都与 a_1 认识，要么有 3 人都与 a_1 不认识。不妨假设，a_2,a_3,a_4 都与 a_1 认识，对应下面的图 2。如果 a_2 与 a_3 认识，

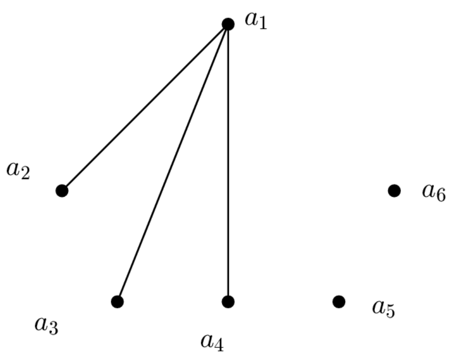

图 2 构造的图

则会出现三角形 a_1,a_2,a_3，证毕。类似地，因此可以假设 a_2,a_3,a_4 这三个人彼此不认识。这样的话就出现了相互之间均没有边的三个顶点 a_2,a_3,a_4，证毕。

事实上，上面的问题可归结为图论中的一个重要定理，该定理在文献[1]中。

定理 1：任一顶点数至少为 6 的图要么有一个三角形，要么有一个大小为 3 的独立集。

用类似的方法可考虑下面的问题。

问题 1：任意 9 个人中，要么有 3 个人相互认识，要么有 4 个人相互不认识。

4 二部图（Bipartite Graph）及匹配（Matching）问题

二部图的定义在前面已经被给出，它是一类非常特殊的图，因图的顶点集被划分成两部分而得名。在图论中，如何识别一个图是二部图主要依靠下面的定理：

定理 2：（二部图判定定理）一个图为二部图的充分必要条件是该图中没有奇数长度的圈。

匹配问题（图的最大匹配或极大匹配问题）既是图论理论中研究的重要问题之一，也是运筹学理论中的重要问题。匹配问题在“人员分配问题”及“最优分配问题”中起到重要作用。图论中结婚定理研究了二部图的匹配问题。

定理 3：（结婚定理）每一个 k – 正则的二部图均存在一个完美匹配。

结婚定理的另一半版本：如果在某个村子中，每个女生恰好认识 k 个男生，且每个男生也恰好认识 k 个女生，则每个女生一定可以和跟她认识的某个男生结婚且每个男生也可以和跟他认识的某个女生结婚。二部图在中学数学中，特别是在竞赛中，有大量的应用，看下面的例子。

例 4：假设某国擒获了 6 名间谍 A,B,C,D,E,F，其中 A 会汉语、法语及日语，B 会德语、俄语及日语，C 会英语和法语，D 会西班牙语，E 会英语和德语，F 会俄语和西班牙语，请问最少用多少间房子关押他们，使得他们当中的任意两个人均无法交流。

分析：事实上，这是一个求最优解的问题。如果每人单独安排 1 间房子关押他们，当然他们当中的任意两个人均无法交流，但是这样需要 6 间房子，不是最优解。利用图论知识，构造图：把这 6 名间谍看成 6 个顶点，两人之间能交流（即他们都会同一门语言）当且仅当对应的两个顶点之间有边。于是在这个图中，可以把出现在独立集中的间谍关押到一起。换句话说，如果构造的图恰好是二部图的话，则只需要 2 间房子就够了。

解：通过上面分析，构造图如下：

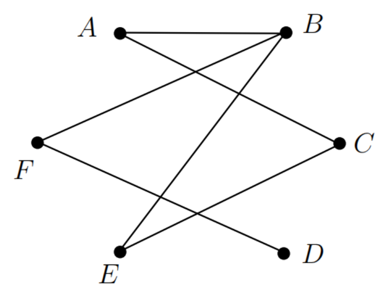

图 3 构造的图

事实上，从图 1 中很容易看出，这是一个二部图，其划分集合为 $\{A,E,F\}$ 和 $\{B,C,D\}$。于是可以得到该题的解：只需要 2 间房子关押他们就可以使得他们当中的任意两个人均无法交流，该 2 间房子分别关押 $\{A,E,F\}$和 $\{B,C,D\}$ 即可。

接下来我们再看一个实际生活当中碰到的问题：给 n 个员工安排 n 项任务，并不是每个员工都能胜任所有的工作，如何安排才能使得每项任务都有人做且每个员工恰好可以得到一项自己能够胜任的工作？这事

实上就是图论中的匹配问题，看下面的例子。

例5：假设某校有 4 名运动员 A,B,C,D，其中 A 擅长篮球和足球，B 擅长乒乓球和羽毛球，C 擅长篮球和乒乓球，D 擅长足球和羽毛球。问有没有一种方案使得每位运动员都能做自己擅长的项目且每个项目恰好有一位运动员参加。

分析：将 4 名运动员 A,B,C,D 和 4 项运动项目分别看成二部图的顶点划分集，如果某个运动员擅长某个项目，则将他们用边连接起来，该问题转换成求此二部图的完美匹配问题。

解：通过上面分析，用 x 代表篮球、y 代表足球、z 代表乒乓球、w 代表羽毛球，可以构造下面的图：

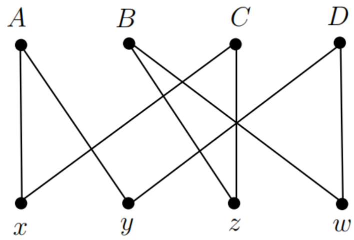

图 4 构造的二部图

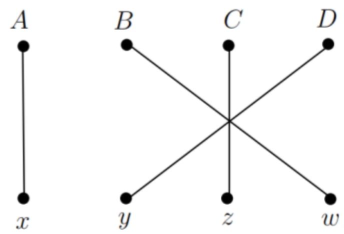

图 5 二部图的匹配

根据定理 3 容易判断该图存在完美匹配(一般地，对于未接触图论理论的中学生来说，可以直观上判断)，且易观察得图 5 是图 4 的一个完美匹配。因此可按照图 5 中的对应方案安排，即 A 让打篮球，让 B 踢足球，让 C 打乒乓球，让 D 打羽毛球即可。

二部图的定义当然可以推广到三部图或更多部图，只需要修改下图顶点集的划分块即可。下面的例子说明了匹配与逻辑推理问题之间的关系。

例6：假设张三、李四和王五三位同学进行百米决赛，用 a,b,c 代表他们三人。已知 a 不是第一名，b 既不是王五也不是第二名，第一名不是李四，张三是第二名。问 a,b,c 各代表谁？各是第几名？

分析：将张三、李四和王五三位同学放到一个集合中，将 a,b,c 放到一个集合中，将第一名、第二名及第三名（分别用数字 1、2、3 表示）放到一个集合中，考虑这三个集合构成的一个三部图，如果上述三个集合中的两个元素具有“是”这个关系(如张三是第二名)，则把它们用一条实线相连，否则用虚线连接。这样的话可以构造一个图，最终我们需要找到这个三部图的一个完美匹配。

解：通过上面分析，首先根据已知条件可以得到下面的图（图中 ZS 代表张三、LS 代表李四，WW 代表王五）：

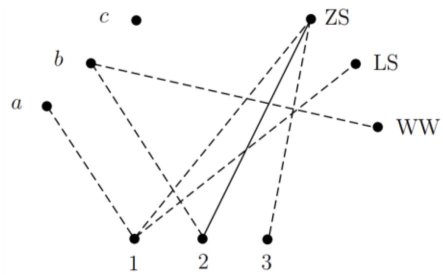

图 6 构造的三部图

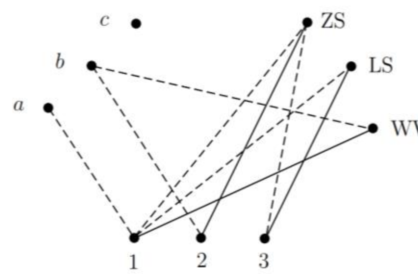

图 7 构造的三部图

从图 6 可知，第一名只能是 WW，因此 LS 只能是第三名，即我们得到图 7。现在考虑 b，b 显然不能代表 ZS，由于 b 不是第二名，于是 b 只能是 LS，即 b 是第三名。现在考虑 a，因为 a 不是第一名且 b 是第三名，因此 a 只能是第二名。进一步，a 是 ZS。最后考虑 c，根据匹配规则，c 只能是第一名且 c 代表 WW，最后得到图 8。

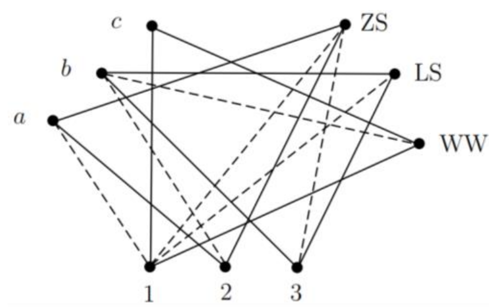

图 8 三部图的完全匹配

用类似的方法可考虑下面的问题。

问题：某工厂有 a,b,c 三位工人，一位来自北京，一位来自上海，一位来自广州，每人的业余爱好只能是足球、围棋和跳舞中的一种。现已知下面的条件：a 不喜欢足球；b 不喜欢歌舞；喜欢足球的不是上海人；喜欢歌舞的是北京人；b 不是广州人。问 a,b,c 各来自哪？他们的业余爱好各是什么？

5 结论

数与形是数学中的两个最古老，也是最基本的研究对象，它们在一定条件下可以相互转化。中学数学研究的对象可分为数和形两大部分，数与形是有联系的，这个联系称之为"数形结合"或"形数结合"。图论是离散数学的一个分支，它以图为研究对象。图论中的图是由若干点及连接两点的边所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系。在图中点代表事物，边用来表示所连接的点之间具有的特定关系。

在中学数学的教学过程中，本文提出了"数图结合"的教学思想。在实际课堂教学中，教师应结合数与图，用直观生动的图形引导学生学习和探索一些实际数学问题。本文探讨了图论的基本思想方法在中学数学中的一些应用。具体来说，本文首先通过生活中的两个具体问题引入了图论问题的实际应用，接下来本文探究了图论中的拉姆塞数问题、二部图及匹配问题在中学数学教学中的若干应用。

基金项目

本文得到国家自然科学基金（11801441）和陕西省自然科学基础研究计划（2020JQ-761）的资助。

参考文献

[1] 徐俊明. 图论及其应用 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2010.

[2] 乔友付. 图论在数学竞赛中的应用 [J]. 科技视界, 2012, 3: 41-43.

[3] 陈丽娟. 图论在数学竞赛中的应用 [J]. 重庆科技学院学报(自然科学版), 2008, 10(6): 137-138.

[4] 郭梦夏. 数学竞赛中图论问题的探究 [J]. 时代教育, 2017, 23: 173.

[5] 艾素梅, 魏文宏, 刘力. 数学建模中的图论方法 [J]. 沧州师范专科学校学报, 2010, 26 (4): 98-99.

[6] 毛明合. 论初中数学教学中培养学生建模能力的措施 [J]. 数学学习与研究, 2022, 12 (1): 53-55.

[7] 童莉, 张灵. 论小学高年级开展数学建模活动的素养价值和策略[J]. 数学教学通讯, 2022, 13 (1): 6-7.

[8] 耿显亚. 基于数学建模的图论课程探究 [J]. 梧州学院学报, 2019, 29 (6): 60-63.

[9] 高红, 刘仁邦, 冯婷婷, 刘巍. 图论教学中的可拓变换 [J]. 数学的实践与认识, 2021, 51 (16): 262-270.

[10] 孙晓玲, 杜建伟. 关于图论课堂教学的探讨与研究 [J]. 教育教学论坛, 2020, 31 (1): 301-302.

[11] 康小燕. 图论在初中数学教学中的应用 [J]. 山西教育(教学) , 2015, 15 (1): 59-60.

[12] 邹颖, 钱耘. 图论与中学数学的一些联系 [J]. 合肥师范学院学报, 1990, 8 (2): 27-30.

[13] 陈子今. 图论在生活中的几个应用 [J]. 大科技, 2017, 33(1): 38-39.

[14] 姚寒青. 反证法及其在图论中的应用 [J]. 时代教育, 2017, 4 (2): 126-127.

[15] 侯睿. 走进初中数学"最短路径问题"的奇妙世界 [J]. 初中生辅导, 2022, 12 (1): 48-53.

[16] 刘勍. 由七桥问题发展起来的数学分支与数学方法 [J]. 西北成人教育学院学报, 2021, 156 (6): 95-98.

作者简介

刘聪敏

（1992—），女，汉族，陕西师范大学御锦城小学，本科，研究方向为中小学数学教育。

898783895@qq.com

马儇龙

（1988—），男，汉族，西安石油大学副教授，博士，硕士生导师，研究方向为图论及其应用。

xuanlma@xsyu.edu.cn