

雷达波形隐身性能的综合隐身测度设计



金聪伟, 宋耀良*, 王森

南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏南京 210094

摘要: 隐身测度是衡量雷达信号隐身能力的关键性指标, 然而目前的雷达信号隐身测度大多是单一性评估指标, 难以综合地评价雷达信号隐身能力, 基于此, 本文在前人 LPI 评估因子、相对熵和截获因子的基础上, 改进评估因子, 消除其中对功率谱分布无影响的因素, 构建新的谱分布因子, 利用理想 LPI 信号的谱分布因子归一化谱分布因子; 简化相对熵的最终计算公式, 降低对计算过程的依赖, 仅依靠积分变换后随机变量经验分布函数的首尾即可计算出相对熵; 重新梳理截获因子, 从中提取影响雷达信号隐身性能的功率、时宽、带宽等因素。采用等权乘积的方式, 将上述 3 个隐身评估指标构造成新的综合隐身测度。利用综合隐身测度对常见 LPI 雷达信号进行仿真, 通过仿真分析证明了综合隐身测度的有效性。

关键词: 谱分布因子; 相对熵; 截获因子; 综合隐身测度

DOI: [10.57237/j.se.2023.01.002](https://doi.org/10.57237/j.se.2023.01.002)

Design of Integrated Stealth Measure for Radar Waveform Stealth Performance

Congwei Jin, Yaoliang Song*, Wang Sen

School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China

Abstract: Stealth measure is a key index to measure radar signal stealth capability. However, current radar signal stealth measure is mostly a single evaluation index, which is difficult to comprehensively evaluate radar signal stealth capability. Based on this, this paper improves the evaluation factor on the basis of previous LPI evaluation factor, relative entropy and interception factor, and eliminates the factors that have no influence on the power spectrum distribution. A new spectral distribution factor is constructed and the spectral distribution factor of ideal LPI signal is used to normalize the spectral distribution factor. The final calculation formula of relative entropy is simplified to reduce the dependence on the calculation process. The relative entropy can be calculated only by the beginning and end of the empirical distribution function of random variable after integral transformation. The interception factors are sorted out again to extract the power, time width, bandwidth and other factors that affect the stealth performance of radar signal. A new comprehensive stealth measure was constructed from the above three stealth evaluation indexes by means of equal weight product. The comprehensive stealth measure is used to simulate common LPI radar signals, and the effectiveness of the comprehensive stealth measure is proved by simulation analysis.

Keywords: Spectral Distribution Factor; Relative Entropy; Interception Factor; Comprehensive Stealth Measure

基金项目: 国家自然科学基金面上项目《时-空联合压缩感知 3D 超分辨雷达成像机理研究》(61271331);
国家自然科学基金国际合作项目《基于类 DNA 结构人工电磁材料的电磁波相位调控机理研究》(62211530440).

*通信作者: 宋耀良, ylsong@njust.edu.cn

收稿日期: 2022-12-06; 接受日期: 2023-01-13; 在线出版日期: 2023-02-03

<http://www.sciaandeng.com>

1 引言

近年来，随着战场环境的日益复杂，雷达的生存环境也日益恶劣，因此雷达隐身设计也受到了专家学者广泛的关注，其中低截获雷达信号（LPI）的设计是重中之重[1]。

隐身性能评估指标则是衡量 LPI 雷达信号隐身性能优劣的重要手段，最早评估雷达信号低截获性能的指标是 Schleher 提出的截获因子[2, 3]，从截获与探测距离的角度考虑低截获性能。朱银川等人则从信息熵的角度，分析了雷达波形的不确定性[4]。2010 年，C. Fancey 从功率谱分布的角度构建 LPI 评估因子，利用功率谱峰值和峰值尖峰的加权来评估 LPI 性能[5]。2015 年陈军从相对熵的角度，分析雷达信号与理想 LPI 雷达信号之间接近程度，评估雷达信号的复杂性[6]。此外还有许多研究学者做了相关工作，但是这些指标大多是从单一角度考虑雷达信号的隐身性能，基于此，本文设计了评估雷达信号隐身性能的综合隐身测度（CSM），改进 LPI 评估因子构建谱分布因子，从功率谱分布角度衡量雷达信号的低截获性能，从相对熵角度评估雷达信号的复杂度，同时利用截获因子评估在一定截获条件下的探测性能。

2 综合隐身测度

综合隐身测度融合谱分布因子、相对熵和截获因子从功率谱分布、波形复杂度、探测与截获距离等多个角度综合考察雷达信号的隐身能力。综合隐身测度 CSM (Comprehensive Stealth Metrication) 可以用多参数函数来表示

$$CSM = F(\Gamma, KL, \alpha) \quad (1)$$

其中， Γ 表示谱分布因子， KL 表示相对熵， α 表示截获因子。

2.1 谱分布因子

功率谱分布是衡量雷达信号隐身性能重要指标，功率谱峰值越低，隐身性能越好[7]，因此 Fancey 利用功率谱峰值和功率谱的主要分布频段构建了衡量雷达信号隐身特性的 LPI 评估因子，如式(2)所示：

$$\gamma = p_{\max}^{3.2} \cdot S_p \cdot \beta^{0.6} \quad (2)$$

其中， p_{\max} 表示雷达波形的功率谱峰值， S_p 表示主要分布频段的功率谱和占总功率谱的百分比， β 表示计算评估因子所用到的采样点数量。 γ 值越低，雷达信号功率谱越接近理性 LPI 信号，雷达信号的隐身性能越好，但是 γ 受到信号功率大小的影响。

为减小功率谱对 S_p 的影响，通常从信号中心频率向前后频率点延伸，直到所取的功率谱总和占总功率谱的 97%，其他未选取采样点的功率谱密度相对较小，且分布广泛，容易对 S_p 的计算产生较大影响因此不予考虑。以 LFM 信号为例，选取的采样点如图 1 中绿色实线所示。

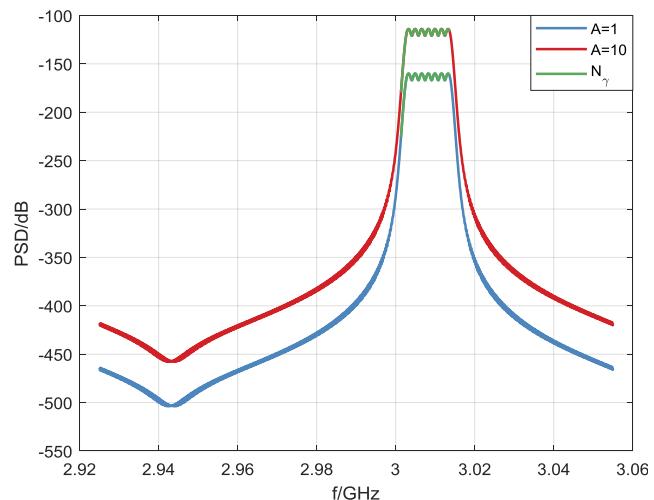


图 1 LFM 信号功率谱图

图 1 中两个 LFM 信号的幅度 $A=1$ 和 $A=10$ ，其他参数保持不变，具体设置为如下：时宽 $T=15\mu s$ ，载频 $f_0 = 3\text{GHz}$ ，选取载频附近占总功率谱密度之和 97% 的采样点（图 1 中的绿色采样点），两个信号的样本数 $\beta = 195$ 。功率谱密度的分布直方图，结果如图 2 中的所示，从图中可以看出两个 LFM 信号的 S_p 相同，皆为 $S_p = 32.0413\%$ 。

将图 1 中 LFM 信号 ($A=1$) 的功率谱向上平移，得到移后功率谱图，如图 3 所示，从图中可以看出：平移后，两个不同功率的 LFM 信号的功率谱完全重合。

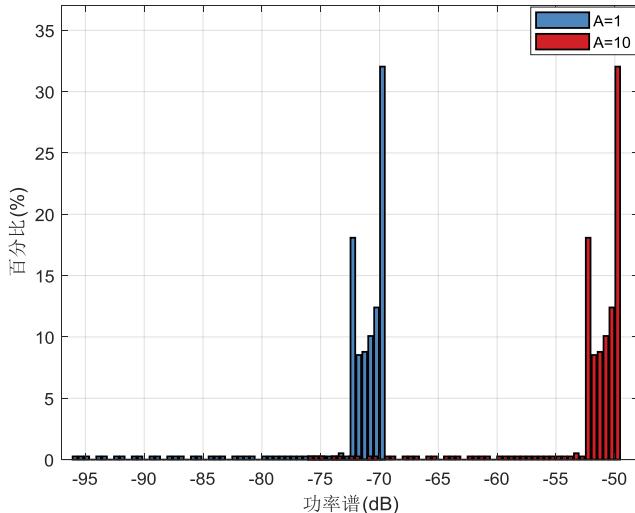


图 2 LFM 信号的功率谱分布直方图

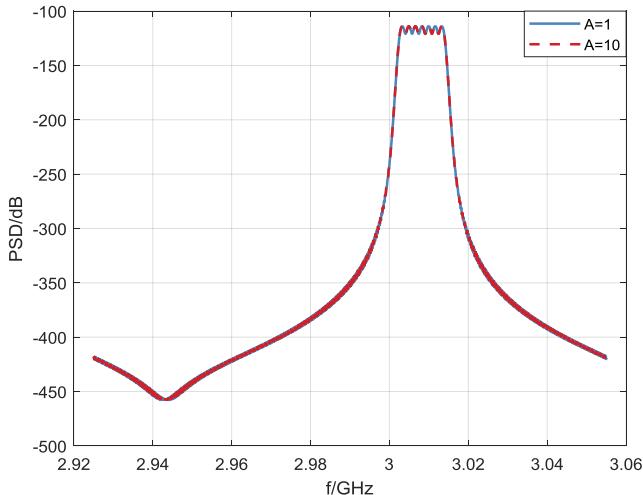


图 3 平移 LFM 信号功率谱图

通过图 2 和图 3 可以得知: 虽然上述两种信号的功率不同, 但是功率谱经过平移后可以重叠, 这说明功率只会造成信号的谱分布的上下平移, 不会对功率谱在频带上的分布造成影响, 因此在 Fancey 的 LPI 评估因子的基础上进一步改进, 构建评估雷达信号谱分布情况的谱分布因子。

已知在某一功率 P_t 的情况下, 理想的低截获雷达信号是功率为 P_t 的高斯白信号, 其功率谱为常数, 可以表示为

$$\text{PSD}_{\text{best}} = \frac{P_t}{B_s} \quad (3)$$

其中, P_t 表示雷达信号的峰值功率, B_s 表示雷达

信号的采样带宽。基于此, 提出相对于理想低截获信号的相对功率谱, 如式(4)所示:

$$\text{PSD}_{\text{rb}}(f) = \frac{\text{psd}(f)}{\text{PSD}_{\text{best}}} = \frac{\text{psd}(f) \cdot B_s}{P_t} \quad (4)$$

其中, $\text{psd}(f)$ 表示某一特定功率雷达信号的功率谱, P_t 为该雷达信号的功率, 此时 $\text{PSD}_{\text{rb}}(f)$ 表示的是在每一频点上, 该雷达信号的功率谱偏离基于该信号功率的理想低截获雷达信号的情况。图 1 中两个 LFM 信号相对功率谱如图 4 所示。

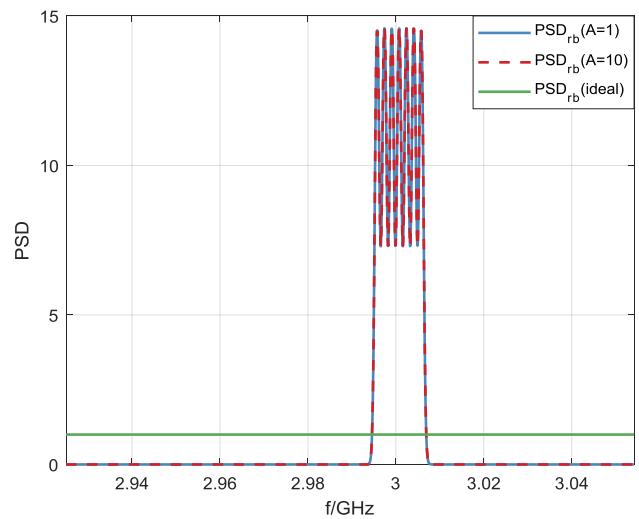


图 4 LFM 信号的相对功率谱分布(图例出错, 已修改)

从图 4 中可以看出, 虽然两个 LFM 信号的功率并不相同, 但是功率谱距基于各自身信号功率的理想低截获信号的功率谱的偏离程度是相同的, 因此通过式(4)可以得出结论: 雷达信号的功率对雷达信号的谱分布是没有影响的, 此外式(4)还有一个重要作用, 即 $\text{PSD}_{\text{rb}}(f)$ 是一个无量纲数据, 剔除了量纲对谱分布的影响。

此时式(2)中各项数据的含义也发生了相应的变化, 如式(5)所示:

$$\gamma_{\text{new}} = P_{\text{rmax}}^{3.2} \cdot S_{\text{rp}} \cdot \beta_r^{0.6} \quad (5)$$

其中, P_{rmax} 表示 PSD_{rb} 的峰值, 即雷达信号的功率谱偏离理想 LPI 信号功率谱的最远情况, S_{rp} 表示主要分布频段的相对功率谱之和占总相对功率谱的百分比, 代表雷达信号的主要功率谱偏离理想 LPI 信号功率谱的

情况。与式(2)的含义类似, γ_{new} 的值越低, 说明其谱分布愈接近理想 LPI 信号功率谱分布情况。因此 γ_{new} 适合作为衡量雷达信号谱分布情况的谱分布因子。

通过后续分析可知, 谱分布因子 γ_{new} 的分布在 $10^1 \sim 10^{13}$ 范围内, 数量级分布范围十分广泛, 因此需要对谱分布因子 γ_{new} 进行归一化处理, 以防止量级对后续综合隐身测度 (CSM) 的影响。

谱分布因子 γ_{new} 归一化如式(6)所示:

$$\Gamma = \frac{\gamma_{\text{new}} - \gamma_{\text{new,min}}}{\gamma_{\text{new,max}} - \gamma_{\text{new,min}}} = K_\alpha \cdot \gamma_{\text{new}} - \gamma_{\text{new,min}} \quad (6)$$

其中, γ_{new} 表示某一雷达信号的谱分布因子, $\gamma_{\text{new,max}}$ 为最大谱分布因子, $\gamma_{\text{new,min}}$ 为最小谱分布因子, 实际上为理想 LPI 信号的谱分布因子, 将会在接下来的证明中证明, $K_\alpha = 1 / (\gamma_{\text{new,max}} - \gamma_{\text{new,min}})$, 由于综合隐身测度采用的是乘积的方式, 因此系数 K_α 不会对综合隐身测度 (CSM) 产生影响, 因此归一化最重要的是求得 $\gamma_{\text{new,min}}$ 。

式(2)中雷达信号功率谱峰值 P_{max} 的范围为 $P_{\text{max}} \in [P_t / B_s, P_t]$, 则通过式(4), 可以得到式(7)中的 P_{rmax}

$$P_{\text{rmax}} = \frac{P_{\text{max}}}{\text{PSD}_{\text{best}}} = \frac{P_{\text{max}} \cdot B_s}{P_t} \quad (7)$$

从式(7)中可以得到式(5)中的雷达信号相对功率谱峰值 P_{rmax} 的范围为 $P_{\text{rmax}} \in (1, B_s]$, 假设雷达信号相对功率谱峰值 P_{rmax} 以一个很小的变化量 Δp ($\Delta p \ll P_{\text{rmax,min}}$, 可以取 $\Delta p = 0.05 \min(P_{\text{rmax,min}}) = 0.05$) 从 1 向 B_s 递增, 当 $P_{\text{rmax}} = 1 + 0.05m, m \in (0, 20B_s]$ 时, 剩余相对功率谱密度之和 S_p 可以表示为

$$S_p = \sum P_r(f) = B_s - 0.05m - 1 \quad (8)$$

其中, $f \in [f_L, f_{P_{\text{rmax}}}) \cup (f_{P_{\text{rmax}}}, f_H]$ 。

若功率谱密度的采样点数 $N_p = \beta_r$, (β_r 表示计算谱分布因子所用到的采样点数量) 则式(5)中 $S_p \cdot \beta_r$ 的范围为 $S_p \cdot \beta_r \in (N_{S_{\beta_r}}, N_p - 1]$, 下界 $N_{S_{\beta_r}}$ 满足式(9)

$$\frac{B_s - P_{\text{rmax}}}{N_{S_{\beta_r}}} = P_{\text{rmax}} \quad (9)$$

将 $P_{\text{rmax}} = 1 + 0.05m$ 带入式(9), 则 $N_{S_{\beta_r}}$ 可以表示为

$$N_{S_{\beta_r}} = \frac{B_s}{1 + 0.05m} - 1 \quad (10)$$

其中, 式(9)的含义: 在临界 $N_{S_{\beta_r}}$ 处, 除去峰值功率谱密度 $P_{\text{rmax}} = 1 + 0.05m$, 剩余功率谱密度之和均匀分布在 $N_{S_{\beta_r}}$ 个采样点上, $N_{S_{\beta_r}}$ 个采样点中的每个采样点的功率谱密度 P_{avg} 等于峰值功率谱密度 P_{rmax} , 即 $P_{\text{avg}} = P_{\text{rmax}}$, 当 $S_p \cdot \beta_r < N_{S_{\beta_r}}$ 时, $P_{\text{avg}} > P_{\text{rmax}}$, 与 P_{rmax} 为功率谱密度峰值相矛盾, 因此 $S_p \cdot \beta_r$ 满足 $S_p \cdot \beta_r \in (N_{S_{\beta_r}}, N_p - 1]$ 。

当 $P_{\text{rmax}} = 1 + 0.05m, m \in (0, B_s]$ 时, 记 $S_p \cdot \beta_r = n$, n 的范围为 $n \in (N_{S_{\beta_r}}, N_p - 1]$, 式(5)可以表示为

$$\gamma_{\text{new}}(m, n) = (1 + 0.05)^{0.32} \cdot n^{0.6} \quad (11)$$

其中, $m \in (0, 20B_s], n \in (N_{S_{\beta_r}}, N_p - 1]$, N_p 表示功率谱采样点数, 下界 $N_{S_{\beta_r}} = B_s / (1 + 0.05m) - 1$ 。

因此, 求解 γ_{new} 最大最小值可以总结为

$$\max \gamma_{\text{new}}(m, n) = (1 + 0.05)^{0.32} \cdot n^{0.6}$$

$$\min \gamma_{\text{new}}(m, n) = (1 + 0.05)^{0.32} \cdot n^{0.6}$$

subject to

$$m = 0, n = N_p \quad (12)$$

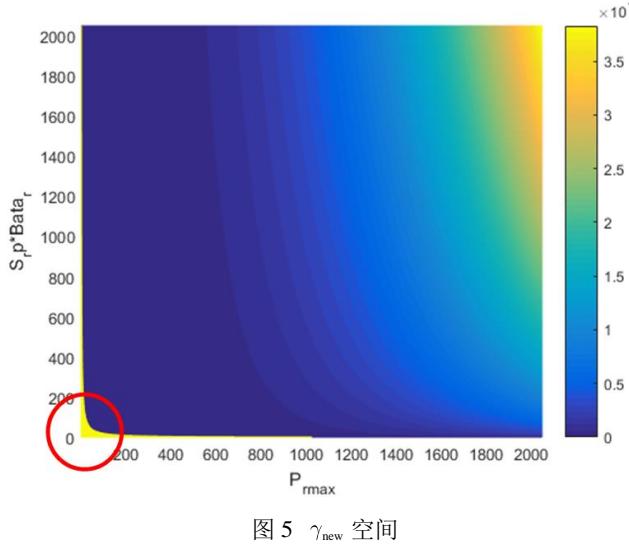
$$m \in (0, 20B_s], n \in (N_{S_{\beta_r}}, N_p - 1]$$

$$N_{S_{\beta_r}} = \frac{B_s}{(1 + 0.05m)} - 1$$

图 5 展现的是在式(12)中约束条件的约束下, 以 P_{rmax} 为横坐标, 以 $S_p \cdot \beta_r$ 为纵坐标, 所生成 γ_{new} 的空间, 图中左下角的黄色区域为不满足约束条件的 γ_{new} 值, 在功率谱密度的采样点数 $N_p = 2048$ 的情况下, 通过计算可以得知, 当 $P_{\text{rmax}} = 1, S_p \cdot \beta_r = 2048$ 时, γ_{new} 取得最小值, 最小值为 $\gamma_{\text{new,min}} = 97.0059$, 当 $P_{\text{rmax}} = 2048, S_p \cdot \beta_r = 95$ 时, γ_{new} 取得最大值, 最大值为 $\gamma_{\text{new,max}} = 3.8273 \times 10^{12}$ 。此时式(6)中的归一化 γ_{new} 可以表示

$$\Gamma = K_\alpha (P_{\text{rmax}}^{3.2} \cdot (S_p \cdot \beta_r)^{0.6} - 97.0059^{0.6}) \quad (13)$$

其中, $K_\alpha = 1 / (\gamma_{\text{new,max}} - \gamma_{\text{new,min}})$ 是一个非常小的常数。

图 5 γ_{new} 空间

对于一般情况下的 N_p , Γ 可以表示为

$$\Gamma = K_\alpha (P_{r\max}^{3.2} \cdot (S_{rp} \cdot \beta_r)^{0.6} - N_p^{0.6}) \quad (14)$$

2.2 相对熵

从信息论的角度衡量雷达信号与理想 LPI 雷达信号之间的关系, 理想 LPI 雷达信号所包含的信息量最大, 最复杂[8-10], 一般认为随机高斯白噪声信号是理想的 LPI 雷达信号。由于随机高斯白噪声信号具有理想的随机特性, 因此理想 LPI 信号的信息熵值为 1, 此时理想 LPI 信号的复杂性最大。

雷达信号的信息熵越接近理想 LPI 信号, 则信号越复杂, 信息量越大, 信号也就越接近理性 LPI 信号。相对熵体现了雷达信号的复杂度, 雷达信号越复杂, 其与理想 LPI 雷达信号之间的相对熵越低, 相对熵的范围为 [0,1]。

雷达信号与理想 LPI 雷达信号之间的相对熵表示为

$$d(s_i, s) = g(f(s_i(1), \dots, s_i(N)), f(s(1), \dots, s(N))) \quad (15)$$

其中, $g(\cdot)$ 表示相对熵距离测量函数, $f(\cdot)$ 表示雷达波形的特征函数, s_i 表示理想 LPI 信号集合, s 表示待测雷达信号集合。

2.2.1 特征函数的确定

根据雷达信号的波形信息求解特征函数主要步骤如下:

首先从雷达信号波形集合 s 中构建 L 维随机向量

s_m , 具体可以表示为

$$s_m = [s(m), s(m+1), \dots, s(L+m-1)]^T \quad (16)$$

其中, $m=1, 2, \dots, M$, 向量 s_m 的长度为 L , M 和 L 满足 $N=L+M-1$, N 表示雷达信号波形集合 s 的长度。

s_m 的归一化如式(17)所示

$$\bar{s}_m = \frac{s_m - \mu_{s_m}}{\sigma_{s_m}^2} \quad (17)$$

其中, μ_{s_m} 表示向量 s_m 的均值, $\sigma_{s_m}^2$ 表示向量 s_m 的方差。

\bar{s}_m 的协方差矩阵表示为

$$\bar{S}_M^{\bar{s}_m} = \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^M \bar{s}_m \cdot \bar{s}_m^T \quad (18)$$

当 $M \rightarrow \infty$ 时, $\bar{S}_M^{\bar{s}_m} \rightarrow I_L$, $\sqrt{M}(\bar{S}_M^{\bar{s}_m} - I_L) \rightarrow \sqrt{L}W_L^S$, 由于 $\sqrt{L}W_L^S$ 满足式(19)中的条件

$$\begin{cases} E[\sqrt{L}W_L^S(i,j)] = 0, \forall i, j \\ E[LW_L^S(i,j)^2] = 1, i \neq j \\ E[LW_L^S(i,i)^2] = 1, i = j \end{cases} \quad (19)$$

因此 $\sqrt{L}W_L^S$ 被称为魏格纳 (Wigner) 矩阵, W_L^S 表示归一化的魏格纳 (Wigner) 矩阵, 由信号集合 s 所生成的归一化魏格纳 (Wigner) 矩阵可以表示为

$$W_L^S = \sqrt{\frac{M}{L}} (\bar{S}_M^{\bar{s}_m} - I_L) \quad (20)$$

根据维格纳半圆定律, 归一化维格纳 (Wigner) 矩阵 W_L^S 渐进谱分布可以表示为:

$$f^W(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2}, \lambda \in [-2, 2] \quad (21)$$

其中, λ 为归一化维格纳 (Wigner) 矩阵 W_L^S 的特征值。根据式(21)可以得出由雷达信号集合生成的魏格纳 (Wigner) 谱分布为一固定函数, 因此 $f^W(\lambda)$ 可以作为雷达信号的特征函数。

根据式(21), 任意雷达信号集合 s 的归一化魏格纳

(Wigner) 矩阵的一维分布函数可以表示为

$$F(\lambda) = \lim_{L \rightarrow \infty} F^{W_L^S}(\lambda)$$

$$= \begin{cases} 0 & , \lambda < -2 \\ \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot \left[1 - I_{\frac{\lambda^2}{4}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right], & -2 \leq \lambda < 0 \\ \frac{1}{\pi} B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \cdot \left[1 + I_{\frac{\lambda^2}{4}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right], & 0 \leq \lambda < 2 \\ 1 & , \lambda \geq 2 \end{cases} \quad (22)$$

其中， λ 为雷达信号集合构成的归一化魏格纳 (Wigner) 矩阵 W_L^S 按从小到大排列的特征值， $B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 表示 β 函数， $I_{\frac{\lambda^2}{4}}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 表示不完全 β 函数。

2.2.2 相对熵的计算

在信息论中，可以选用相对熵来测量两个分布函数之间的差别，相对熵的表达式如式(23)所示

$$D_{KL}(f_1 \parallel f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \log\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right) dx \quad (23)$$

其中， $f_1(x)$ 表示理论概率密度函数， $f_2(x)$ 表示随机变量 X 的真实概率密度函数。

根据式(23)可以得到相对熵的均值表示为

$$\begin{aligned} D_{KL}(f_1 \parallel f_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \log(f_1(x)) dx \\ &\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \log(f_2(x)) dx \\ &= E(\log(f_1(x))) - E(\log(f_2(x))) \end{aligned} \quad (24)$$

为了简化式(24)的计算，对随机变量 X 进行概率积分变换，随机变量变换为随机变量 Z ，且 Z 服从均匀分布 $U[0,1]$ ，随机变量样本满足 $Z(n) = F(X(n))$, $n=1,2,L,N$ ，其中 $F(\cdot)$ 表示随机变量的概率分布，对应式(22)的一维分布函数。因此对原随机变量 X 的处理则变为对随机变量 Z 的处理，式(25)则变为

$$D_{KL}(f_1 \parallel f_2) = E(\log(f_1(z))) - E(\log(f_2(z))) \quad (25)$$

因为随机变量 Z 服从均匀分布 $U[0,1]$ ，则其概率密度表示为

$$f_1(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & others \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25)可得

$$\begin{aligned} D_{KL}(f_1 \parallel f_2) &= 0 - E(\log(f_2(z))) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \log(f_2(x)) dx \\ &= \int_0^1 \log(f_2(x)) dx \end{aligned} \quad (27)$$

随机变量 Z 的概率分布函数可以表示

$$Q_z(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^L I(Z(n) \leq z) \quad (28)$$

其中， $I(\cdot)$ 表示一个指示函数。

将区间 $[0,1]$ 分成 K 份，除端点外共有 $K-1$ 个分割点，当 $K \rightarrow \infty$ 时， $\max |z_k - z_{k-1}|_{1 \leq k \leq K} \rightarrow 0$ ，因此式(28)对应在分割点处的概率密度可以表示为

$$f_2(z_k) = \frac{Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} \quad (29)$$

因此式(27)的离散形式可以表示为

$$D_{KL}(f_1 \parallel f_2) = - \sum_{k=1}^K (z_k - z_{k-1}) \log \frac{Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} \quad (30)$$

根据等价无穷小的相关概念，再结合用式(31)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} Q_z(z) = z, 0 \leq z \leq 1 \quad (31)$$

则式(29)可以取极限

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \log\left(\frac{Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}}\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log\left(\frac{Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})}{z_k - z_{k-1}} - 1 + 1\right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log\left(\frac{[Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})] - [z_k - z_{k-1}]}{z_k - z_{k-1}} + 1\right) \\ &\approx \frac{[Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})] - [z_k - z_{k-1}]}{z_k - z_{k-1}} \end{aligned} \quad (32)$$

根据式(32)，式(30)可以表示为

$$D_{KL}(f_1 \parallel f_2) = - \sum_{k=1}^K [Q_z(z_k) - Q_z(z_{k-1})] - [z_k - z_{k-1}] \quad (33)$$

将(33)中的累加结构展开

$$\begin{aligned}
 D_{KL}(f_1 \| f_2) &= -\{[Q_z(z_1) - Q_z(z_0)] + [Q_z(z_1) - Q_z(z_0)] \\
 &\quad + [Q_z(z_K) - Q_z(z_{K-1})]\} + \{[z_1 - z_0] + \\
 &\quad [z_2 - z_1] + \dots + [z_K - z_{K-1}]\} \\
 &= 1 - [Q_z(z_K) - Q_z(z_0)]
 \end{aligned} \tag{34}$$

其中, 由于区间[0,1]被等分成 K 份, 所以

$$\sum_{k=1}^K (z_k - z_{k-1}) = 1 \tag{35}$$

将式(22)中雷达信号集合 s 的归一化魏格纳(Wigner)矩阵的一维分布函数 $F(\lambda)$ 带入的积分变换中, 得到积分变换后的随机变量 $Z(n) = F(\lambda)$, 利用式(28)~式(35)就可以计算雷达信号集合与理想 LPI 信号集合之间的相对熵, 计算流程如图 6 所示。

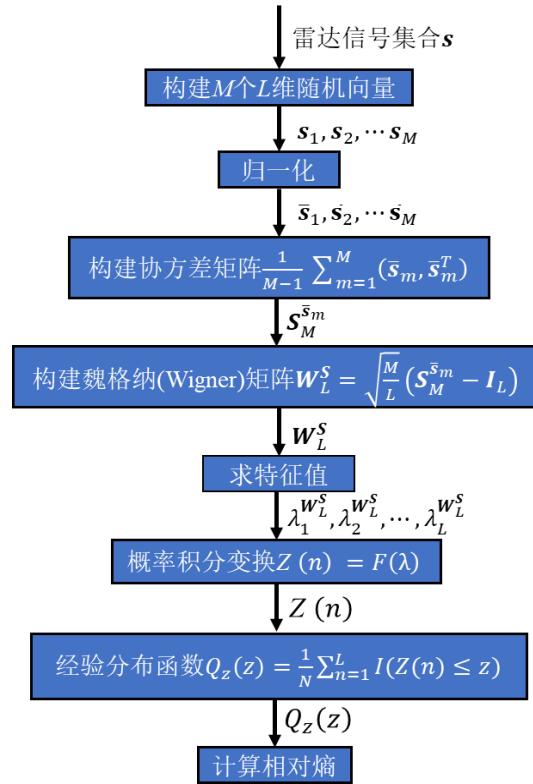


图 6 相对熵计算流程

2.3 截获因子

雷达探测目标与接获接收机截获雷达信号的示意如图 7 所示, 图中雷达最远探测距离 R_D 表示为

$$R_D = \left[\frac{P_t G_T G_R \lambda^2 \sigma_T L_2}{(4\pi)^3 S_{min} L_{RT} L_{RR}} \right]^{\frac{1}{4}} \tag{36}$$

其中, P_t 表示雷达峰值功率, G_T 表示雷达发射机增益, G_R 表示雷达接收机增益, λ 表示雷达信号波长, σ_T 表示目标截面积, L_2 表示雷达达到目标的双程损耗, S_{min} 表示雷达接收机的灵敏度, L_{RT} 表示雷达发射机与天线之间的损耗, L_{RR} 表示雷达天线与接收机之间的损耗。

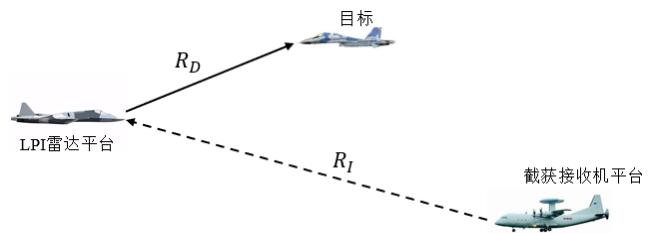


图 7 雷达探测与截获示意图

截获接收机的最大截获距离可以表示为

$$R_I = \left[\frac{P_t G_{TI} G_I \lambda^2 L_I}{(4\pi)^2 S_{Imin} L_{RT} L_{IR}} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{37}$$

其中, G_{TI} 表示雷达发射天线在接获接收机主瓣增益, G_I 表示雷达截获接收机增益, L_I 表示雷达到截获接收机的单程损耗, S_{Imin} 表示雷达截获接收机的灵敏度, L_{IR} 表示天线与截获接收机之间的损耗。

根据式(36)和(37)可以得到截获因子

$$\alpha = \left[\frac{P_t G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 L_{RR} S_{min}}{4\pi G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 S_{Imin}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \tag{38}$$

假设雷达信号的工作带宽 B , 中频带宽 B_{nR} , 截获接收机中频带宽 B_{nl} 满足式(39)中的条件

$$B = B_{nR} = B_{nl} \tag{39}$$

式(36)中雷达接收机的灵敏度 S_{min} 可以表示为

$$S_{min} = k T_0 B_{nR} F_{nR} (SNR_{Ro})_{min} \tag{40}$$

其中, k 表示玻尔兹曼常数, T_0 表示标准噪声温度, F_{nR} 表示雷达接收机的噪声系数是, $(SNR_{Ro})_{min}$ 表示雷达接收机所需要的最小输出信噪比。如果雷达接收机的噪声功率谱密度 N_0 均匀, 则输出噪声为 $N = N_0 B$, 雷达信号恒模输出, 则经过匹配滤波过后[11, 12], $(SNR_{Ro})_{min}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} (SNR_{Ro})_{\min} &= \left(\frac{ST}{N/B_{nR}} \right)_{\min} \\ &= \left(\frac{S}{N} \right)_{\min} \cdot TB_{nR} \\ &= (SNR_{Ri})_{\min} \cdot TB \end{aligned} \quad (41)$$

其中， S 表示雷达接收机接收到的信号功率， $(SNR_{Ri})_{\min}$ 表示雷达接收机所需要的最小输入信噪比。则式(35)可以表示为

$$R_D = \left[\frac{P_t G_T G_R \lambda^2 \sigma_T L_2}{(4\pi)^3 T B L_{RT} L_{RR} k T_0 B_{nR} F_{nl} (SNR_{Ri})_{\min}} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (42)$$

式(37)中截获接收机的灵敏度 $S_{I\min}$ 可以表示为

$$S_{I\min} = k T_0 B_{nl} F_{nl} (SNR_{Io})_{\min} \quad (43)$$

其中， F_{nl} 表示截获接收机的噪声系数是， $(SNR_{Io})_{\min}$ 表示截获接收机所需要的最小输出信噪比。与式(41)类似， $(SNR_{Io})_{\min}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} (SNR_{Io})_{\min} &= (SNR_{Ri})_{\min} \cdot TB_{nl} \\ &= (SNR_{Ri})_{\min} \cdot TB \end{aligned} \quad (44)$$

其中， $(SNR_{Ri})_{\min}$ 表示截获接收机所需要的最小输入信噪比。

然而截获接收机一般采用非相干累积方式来提高其输出信噪比，则式(44)可以修正为

$$(SNR_{Io})_{\min} = (SNR_{Ri})_{\min} \cdot (TB)^{\gamma} \quad (45)$$

其中， γ 表示修正因子，由于低截获信号的 TB 通常较大，因此 γ 取值约为 0.5。

则式(37)可以表示为

$$R_I = \left[\frac{P_t G_T G_I \lambda^2 L_I}{(4\pi)^2 T^{0.5} B^{1.5} L_{RT} L_{IR} k T_0 B_{nl} F_{nl} (SNR_{Ri})_{\min}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

根据式(42)和式(46)，截获因子可以表示为

$$\alpha = \left[\frac{P_t G_T^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 B G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (47)$$

从雷达波形的角度分析截获因子，保持其他因素不变，式(47)可以改写为

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 B G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot (P_t)^{\frac{1}{4}} \\ &= K_{P_t} (P_t)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (48)$$

其中， K_{P_t} 表示比例系数，从中可以看出截获因子与雷达信号的功率的四次方根成正比。根据 $E = P_t \cdot T$ ，式(47)可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{E G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 B T G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \\ &= \left[\frac{E G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{1}{BT} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= K_{BT} \cdot \left(\frac{1}{BT} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (49)$$

其中， K_{BT} 表示比例系数，从中可以看出截获因子与雷达信号的时宽带宽积倒数的四次方根成正比。

将雷达信号的多个参数结合分析，式(47)可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[\frac{G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{P_t}{B} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left[\frac{G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{E}{BT} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= K_\alpha \left(\frac{P_t}{B} \right)^{\frac{1}{4}} = K_\alpha \left(\frac{E}{BT} \right)^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \quad (50)$$

其中， K_α 表示比例因子，在同一雷达截获接收机体系，一般为常数。

2.4 综合隐身测度

归一化谱分布因子、相对熵是范围为 [0,1] 的评估指标，截获因子的理想最小值趋近于 0，因此采用乘积方式将 3 个指标等权的构成综合隐身测度，如式(51)

$$\begin{aligned} \alpha &= K_\alpha \left[\frac{P_t G_{TI}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nlR} (SNR_{Ri})_{\min}}{4\pi k T_0 B G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nl}^2 (SNR_{Ri})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \\ &\quad \cdot K_\gamma (P_r^{3.2} \cdot (S_{rp} \cdot \beta_r)^{0.6} - N_p^{0.6}) \cdot \{1 - [Q_z(z_K) - Q_z(z_0)]\} \end{aligned}$$

$$= K_{CSM} \left[\frac{P_t G_{TT}^2 G_I^2 L_I^2 \lambda^2 L_{RR} F_{nR} (SNR_{RI})_{\min}}{4\pi k T_0 B G_T G_R \sigma_T L_2 L_{RT} L_{IR}^2 F_{nI}^2 (SNR_{RI})_{\min}^2} \right]^{\frac{1}{4}} \cdot [P_{r\max}^{3.2} \cdot (S_{rp} \cdot \beta_r)^{0.6} - N_p^{0.6}] \cdot \{1 - [Q_z(z_K) - Q_z(z_0)]\} \quad (51)$$

在同一雷达截获接收机体系下, CSM 则可以表示为

$$\begin{aligned} \alpha &= K_{CSM} \left(\frac{P_t}{B} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot (P_{r\max}^{3.2} \cdot (S_{rp} \cdot \beta_r)^{0.6} - N_p^{0.6}) \\ &\quad \cdot \{1 - [Q_z(z_K) - Q_z(z_0)]\} \quad (52) \\ &= K_{CSM} \left(\frac{E}{BT} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot (P_{r\max}^{3.2} \cdot (S_{rp} \cdot \beta_r)^{0.6} - N_p^{0.6}) \\ &\quad \cdot \{1 - [Q_z(z_K) - Q_z(z_0)]\} \end{aligned}$$

其中, K_{CSM} 为固定常数。

3 仿真与分析

3.1 雷达信号参数设置

选取 LPI 雷达信号中常见的 LFM 信号、NLFM 信号、Baker 二相编码信号、Frank 多相编码信号、Costas 跳频信号、Costas 跳频/Baker 二相编码混合信号和 Costas 跳频/zadoff-chu 多相编码混合信号进行综合隐身测度 (CSM) 的有效性验证, 具体参数如下[13-15]:

- (1) LFM 信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$ 。
- (2) NLFM 信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 群延迟才有汉明窗设计。
- (3) Baker 二相编码信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 相位编码时间 $T_p = 1/15us$, 编码序列由 3 位 Baker 序列 {1, 1, 0} 和 5 位 Baker 序列 {1, 1, 1, 0, 1} 构成的 225 位复合 Baker 序列。
- (4) Frank 信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 相位编码时间 $T_p = 1/15us$, 编码序列采用 225 位 Frank 编码序列。
- (5) Sostas 跳频信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 频率编码时间 $T_f = 1us$, Costas 频率编码为 {2, 8, 9, 12, 4, 14, 10, 15, 13, 7, 6, 3, 11, 1, 5}。

5}。

(6) Costas 跳频/Baker 二相编码混合信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 频率编码时间 $T_f = 1us$, 相位编码时间 $T_p = 1/13us$, Costas 频率编码为 {2, 8, 9, 12, 4, 14, 10, 15, 13, 7, 6, 3, 11, 1, 5}, Baker 序列为 {1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1}。

(7) Costas 跳频/Baker 二相编码混合信号: 幅度 $A=1$, 载频 $f_0 = 3GHz$, 采样频率 $f_s = 130MHz$, 带宽 $B=15MHz$, 脉宽 $T = 15us$, 频率编码时间 $T_f = 1us$, 相位编码时间 $T_p = 1/13us$, Costas 频率编码为 {2, 8, 9, 12, 4, 14, 10, 15, 13, 7, 6, 3, 11, 1, 5}, Zadoff-Chu 序列为 {0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156}*pi/13。

3.2 谱分布因子的仿真分析

式(13)中功率谱密度的采样点数 N_p 设置为 $N_p = 2048$, 假设 $K_\alpha = 1$, 3.1.节中 7 种雷达信号的归一化谱分布因子如图 8 所示。

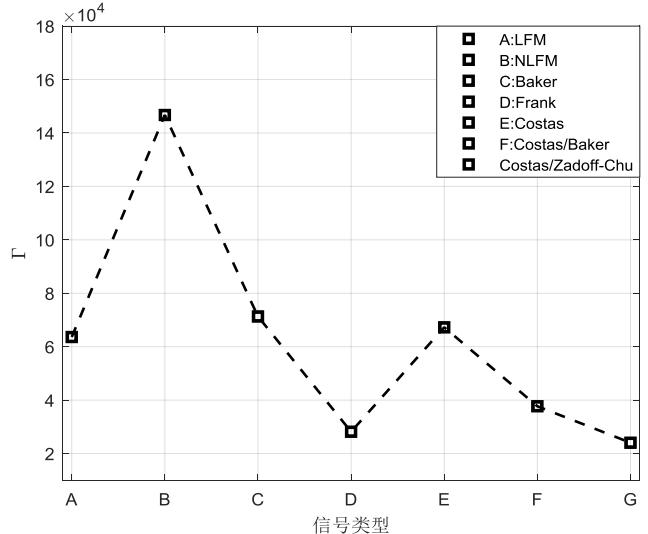


图 8 归一化谱分布因子($K_\alpha = 1$)

分析图 8 中 7 种雷达信号的归一化谱分布因子可以得到以下结论:

(1) 从 E、F 和 G 或 C、D 信号的归一化谱分布因子仿真结果可以得知: 增加雷达信号的相位复杂度, 可以显著降低雷达信号的归一化谱分布因子。

(2) 从 C、F 信号的归一化谱分布因子仿真结果可以得知：对于相位编码相同的雷达信号，频率编码复杂度越高，雷达信号的归一化谱分布因子越低。

通过(1)、(2)两个结论得知：通过提高雷达信号频率和相位复杂度，可以显著降低雷达信号的归一化谱分布因子，从谱分布的角度提高雷达信号。

3.3 相对熵的仿真分析

根据雷达信号的采样频率 $f_s = 130MHz$ 和信号脉宽 $T = 15\mu s$ ，可以得到雷达信号的采样点数量为 $N = 1950$ ，设置相对熵计算过程中的参数： $M = 1200$ ，则根据 $N = L + M - 1$ ，可以得到 $L = 751$ ，按照图 6 中相对熵的计算流程，计算 3.1. 节中 7 种常见的 LPI 雷达信号和理想 LPI 雷达信号——高斯白噪声信号之间的相对熵，仿真结果如图 9 所示，此外还计算了理想高斯白噪声信号与理想高斯白噪声信号之间的相对熵，由于高斯白噪声信号并不是真正理想的原因 $KL_{WGN} = 0.051931$ ，并不是理想状态下的 0。

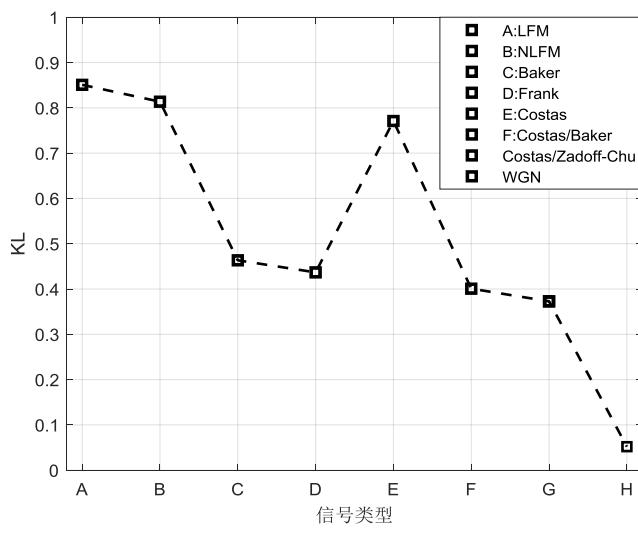


图 9 相对熵 (KL)

分析图 9 中 7 种雷达信号的相对熵可以得到以下结论：

- (1) 调频类信号的相对熵普遍高于编码类信号（频率编码、相位编码，复合编码信号）。
- (2) 从 C、D 和 E 可以得知：频率编码类信号的相对熵大于相位编码类信号。
- (3) 从 C、D 或者 F、G 得知：二相编码类信号的相对熵大于多相编码类信号的相对熵。

(4) 从 C、F 或者 D、G 得知：混合编码雷达信号的相对熵大于单一的相位编码信号。

3.4 综合隐身测度的仿真分析

根据式(49)计算截获因子，假设处于同一雷达与截获接收机场景，因此可以设置 $K_a = 1$ 。由于 3.1. 节中的雷达信号参数（带宽、脉宽和功率）相同，因此 7 种雷达信号的截获因子相同。

式(51)中综合隐身测度比例参数设置为 $K_{CSM} = 1$ ，因此根据式(51)综合隐身测度的计算公式，得到图 10 的仿真结果。

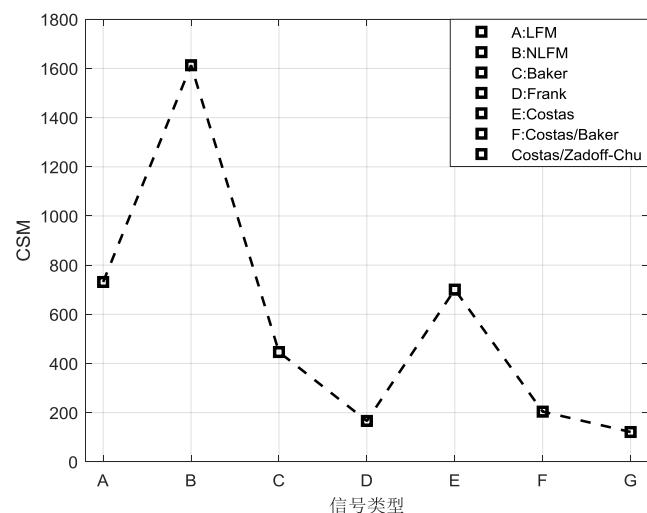


图 10 综合隐身测度 (CSM)

图 10 中综合隐身测度从信息熵、功率谱分布、雷达探测距离与截获等多个角度评估雷达波形的综合隐身性能。例如 Baker 二相编码信号在谱分布方面略差于 LFM 信号，但是其复杂度（相对熵）要远强于 LFM 信号，因此 Baker 二相编码信号的综合隐身性能要优于 LFM 信号。

从 3.1. 节中 7 种雷达信号的综合隐身测度及其子指标的仿真分析中得到隐身雷达信号设计的一些启发：

- (1) 复杂编码（包括复杂频率编码、相位编码和混合编码）可以显著降低雷达信号的功率谱分布提升雷达信号的复杂度，因此可以通过设计复杂编码信号来设计优秀的隐身雷达信号。
- (2) 从截获因子角度，降低雷达信号的功率，提升雷达信号的时宽带宽积可以有效的提高雷达信号在抗截获探测，因此需要在满足设计需求的基础上尽可能地降低信号功率，提升雷达信号的时宽带宽积。

4 总结

综合隐身测度功率谱分布、相对熵以及传统探测与截获等都多个方面综合评估了雷达信号的隐身能力，降低了雷达信号受到复杂接获接收机探测的可能，为设计最优隐身雷达信号提供了测度。

参考文献

- [1] 汪飞, 李海林, 夏伟杰, 周建江. 低截获概率机载雷达信号处理技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2015. 6: 2-4.
- [2] Schleher D C. Low probability of intercept radar. International Radar Conference, 1985, 1: 346-349.
- [3] 高超, 邓晓波, 郑世友. 基于瞬时时宽带宽积的LPI波形射频隐身性能评估方法 [J]. 现代雷达, 2021, 43 (08): 62-65.
- [4] 朱银川. 飞行器射频隐身技术内涵与性能度量研究. 电讯技术, 2013, 53 (1): 6-11.
- [5] Fancey. C., Alabaster. C. M. The metrification of low probability of intercept waveforms [C]. //2010 International Waveform Diversity and Design Conference.: IEEE, 2010: 58-62.
- [6] Chen Jun, Wang, Fei, Zhou, Jianjiang. The metrification of LPI radar waveforms based on the asymptotic spectral distribution of wigner matrices [C]. Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2015: 331-335.
- [7] B. J. Skinner, J. P. Donohoe and F. M. Ingels, "On the power spectral density of FSK/PSK radar signals corrupted by oscillator phase noise," 92 International Conference on Radar, 1992, pp. 238-241.
- [8] 李恒璐. 基于信息熵的雷达目标数据关联与跟踪算法研究 [D]. 西安电子科技大学, 2020.
- [9] Wang F, Sellathurai M, Liu W Q. Security information factor based airborne radar RF stealth. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2015.
- [10] Shi C G, Zhou J J, Wang F, et al. LPID optimization with security information in radar network. International Journal of Electronics, 2014.
- [11] 丁鹭飞, 耿富录. 雷达原理. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2009.
- [12] 胡来招. 雷达侦察接收机设计. 北京: 国防工业出版社, 2000.
- [13] 阮黎婷. 非线性调频信号的波形设计与脉冲压缩 [D]. 西安电子科技大学, 2010.
- [14] YANG HONGBING, ZHANG ZHENKAI, WANG FEI, et al. Design and Analysis of Costas/PSK RF Stealth Signal Waveform [C]. // 2011 IEEE CIE International Conference on Radar. 2011: 1247-1250.
- [15] CORRELL, BILL, JR., BEARD, JAMES K., SWANSON, CHRISTOPHER N. Costas Array Waveforms for Closely Spaced Target Detection [J]. 2020, 56 (2): 1045-1076.