

# 三轴振动系统数字化建模方法研究



田子岳<sup>1,\*</sup>, 丁镇军<sup>2</sup>, 庆旭昆<sup>1</sup>

<sup>1</sup>南京航空航天大学航空航天结构力学及控制全国重点实验室, 江苏南京, 210016

<sup>2</sup>北京强度环境研究所, 北京 100076

**摘要:** 获取三轴振动系统的动态特性, 为三轴振动系统的改进提供依据, 需要开展三轴振动系统数字化建模工作, 获得三轴振动系统总体频响函数矩阵。三轴振动系统机械部分各部件紧密连接, 因此采用基于刚性连接假设的 Jetmudsen 频响函数法来构建三轴振动系统机械部分的总体频响函数矩阵。电动振动台(简称振动台)是三轴振动系统的重要部件, 其功能是给试验台提供某方向的激振力。振动台受到的外载荷为分布载荷, 因此, 需要给振动台上定义大量的内节点, 获得包含内节点原点频响函数矩阵、外节点与内节点的跨点频响函数矩阵、外节点原点频响函数矩阵的振动台频响函数矩阵后再开展三轴振动系统总体频响函数矩阵的构建工作。这种方法的问题是参与计算的振动台频响函数矩阵规模过大, 不利于开展后续的频响函数构建工作。针对上述问题, 本文提出了一种将作用在结构的分布载荷简化为多点集中载荷的方式, 获得简化后振动台的数字模型。在上述研究的基础上, 获得了三轴振动系统总体频响函数矩阵, 完成了三轴振动系统数字化建模。

**关键词:** 三轴振动系统; 外载荷简化; 总体频响函数矩阵的构建

**DOI:** [10.57237/j.mse.2023.01.002](https://doi.org/10.57237/j.mse.2023.01.002)

# Research on Digital Modeling Method of Triaxial Vibration System

Tian Zi-Yue<sup>1,\*</sup>, Ding Zhen-Jun<sup>2</sup>, Qing Xu-Kun<sup>1</sup>

<sup>1</sup>State Key Laboratory of Mechanics and Control for Aerospace Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China

<sup>2</sup>Beijing Institute of Structure and Environment Engineering, Beijing 100076, China

**Abstract:** To meet the demand of providing basis for improving triaxial vibration system, it is necessary to extract the overall Frequency Response Function (FRF) matrix of triaxial vibration system from its digital model. The mechanical parts of triaxial vibration system is connected tightly which satisfy rigid connection assumption. The Jetmudsen FRF method is used to construct the overall frequency response function matrix of triaxial vibration system. The electrodynamic shaker (referred to as the shaker) is an important component of the three-axis vibration system, and its function is to provide the test bench with an excitation force in a certain direction. Therefore, it is necessary to define a large number of internal nodes on the shaker. The FRF matrix of shaker (including origin FRF matrix of internal nodes and joints, cross-point FRF matrix of internal nodes and joints) should be obtain to carry out the construction of overall FRF matrix of triaxial vibration system. It is difficult because the size of FRF matrix of shaker is too large. So a way to simplify the distributed loads exerting on the structure into multi-point concentrated loads is proposed, it can be used to obtain the simplified digital model of the electrodynamic shaker. Based study above, the overall frequency response function matrix of the triaxial vibration system is

\*通信作者: 田子岳, 1181676545@qq.com

收稿日期: 2023-04-26; 接受日期: 2023-05-25; 在线出版日期: 2023-06-15

<http://www.mechscieng.com>

obtained, and the digital modeling of the triaxial vibration system is completed.

**Keywords:** Triaxial Vibration System; Simplifying the Distributed Loads; Construction of Overall FRF Matrix

## 1 引言

三轴振动系统由功率放大器、电动振动台、液压球头、转接棒、试验台组成, 用于开展设备的环境试验, 试验结果为设备的验收及改进提供依据。实际工作中若三轴振动系统在试验频段内有模态存在, 试验人员无法判定响应谱中某些频段响应过大是设备还是振动系统引起的, 从而对设备的验收及后续的改进工作产生干扰。因此开展三轴振动系统数字化建模, 求解三轴振动系统的总体频响函数矩阵是十分必要的。

目前国内外学者已经开展了三轴振动系统电动振动台数字化建模[7-13]和功率放大器动态特性仿真计算工作[14-16], 但没有开展三轴振动系统总体频响函数矩阵构建的研究。本文研究了构建三轴振动系统总体频响函数矩阵的方法。针对电动振动台数字化建模过程中遇到的计算规模过大导致无法构建三轴振动系统总体频响函数的问题, 讨论了多种将作用在电动振动台的电磁力简化为多点集中载荷的方法, 综合考虑上述方法的计算规模及计算精度, 选取了将分布电磁力简化为作用在线圈中面均匀分布的8点集中载荷的方法, 获得了简化后的电动振动台数字模型。在上述研究的基础上, 提出了构建三轴振动系统总体频响函数矩阵的方法, 完成了三轴振动系统的数字化建模。

需要指出的是在某些情况下若  $H_{cc}^A + H_{cc}^B$  为奇异矩阵, (5)式的取逆运算应为 Moore-Penrose 逆。

频域子结构方法在使用时对各子结构频响函数矩阵的来源没有要求, 即对总结构开展数字化建模时, 研究人员可以使用实验方法或有限元计算得到的, 精度较高的子结构频响函数矩阵来构建总结构的频响函数矩阵[6]。这意味着该方法使用起来非常灵活。因此本文采用频域

## 2 Jetmudsen 频响函数法简介

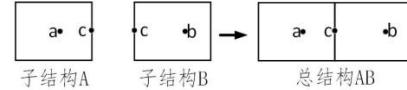


图 1 子结构和总结构示意图

对图 1 所示的子结构 A, 子结构 B 和子结构 A、B 组装成的总结构 AB。将子结构 A, 子结构 B, 总结构 AB 上节点分成外节点(连接点)、内节点两类[1, 2, 4-6]。子系统 A 内节点集合为  $a=\{a_1, \dots, a_n\}$ , 连接点(外节点)集合  $c=\{c_1, \dots, c_i\}$ 。子系统 B 内节点集合  $b=\{b_1, \dots, b_m\}$ , 连接点(外节点)集合  $c=\{c_1, \dots, c_i\}$ 。若子结构 A 与子结构 B 的动态特性已知, 可将子系统 A、B 的频响函数矩阵写成式(1)和式(2)所示的形式。

$$H^A = \begin{bmatrix} H_{aa}^A & H_{ac}^A \\ H_{ca}^A & H_{cc}^A \end{bmatrix} [1] \quad (1)$$

$$H^B = \begin{bmatrix} H_{bb}^B & H_{bc}^B \\ H_{cb}^B & H_{cc}^B \end{bmatrix} \quad (2)$$

连接处的位移协调和力相等条件可以表述如下:

$$X_c^A = X_c^B = X_c^{AB} \quad (3)$$

$$F_c^A + F_c^B = F_c^{AB} \quad (4)$$

可以推导出总系统 AB 的频响函数矩阵的表达式如下:

$$H^{AB} = \begin{bmatrix} H_{aa}^{AB} & H_{ac}^{AB} & H_{ab}^{AB} \\ H_{ca}^{AB} & H_{cc}^{AB} & H_{cb}^{AB} \\ H_{ba}^{AB} & H_{bc}^{AB} & H_{bb}^{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{aa}^A & H_{ac}^A & 0 \\ H_{ca}^A & H_{cc}^A & 0 \\ 0 & 0 & H_{aa}^A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H_{ac}^A \\ H_{cc}^A \\ -H_{bc}^B \end{bmatrix} \left[ H_{cc}^A + H_{cc}^B \right]^{-1} \begin{bmatrix} H_{ac}^A \\ H_{cc}^A \\ -H_{bc}^B \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

子结构方法来构建三轴振动系统总体频响函数矩阵。

## 3 电动振动台模型简化

振动台是三轴振动系统的重要部件。本文研究的三轴振动系统使用的振动台为电动振动台, 电动振动台由磁路系统和运动系统组成。振动台工作时励磁线圈通直流电, 磁钢充磁, 在环形气隙中形成了极强的恒定磁场。

动圈的驱动线圈通交流电，线圈在安培力的作用下带动动圈上下运动。电动振动台线圈的有限元模型节点数为 $n_0$ 。若将有电磁力作用的线圈的所有节点均定义为内节点，球头与动圈连接的部分的 $m$ 个节点定义为外节点，电动振动台定义为子结构A，则电动振动台完整的频响函数矩阵 $H^A$ 为 $(n_0+m) \times (n_0+m)$ 的矩阵，该矩阵的规模过大，无法直接用其开展三轴振动系统总体频响函数矩阵的构建工作。可以考虑简化作用在电动振动台上的分布载荷来缩减电动振动台的频响函数矩阵。电动振动台为线性系统，根据线性系统叠加原理[3]，台面任意一点的加速度频域响应为

$$A_i(f) = \sum_{j=1}^{n_0} H_{ij}(f) \cdot F_j(f) \quad (6)$$

其中， $H_{ij}(f)$ 为线圈上任意一点到台面上任意一点的加速度频响函数， $F_j(f)$ 为作用在线圈上的安培力，可以将线圈所处的磁场近似处理成匀强磁场，线圈任意两点的电流大小相等，将线圈划分为均匀的单元，则作用在任意节点j处的安培力均可写成式(7)的形式

$$F_j(f) = B \cdot dl \cdot I(f) \quad (7)$$

因此可以考虑选择合适的外载荷作用位置和外载荷作用点数 $n_1$ ，简化作用在电动振动台上的分布载荷。此时台面任意一点加速度响应的近似值 $a_i(f)$ 为

$$A_i(f) = \sum_{j=1}^{n_1} H_{ij}(f) \cdot F_j(f) B_0 \quad (8)$$

其中 $B_0$ 为修正系数。

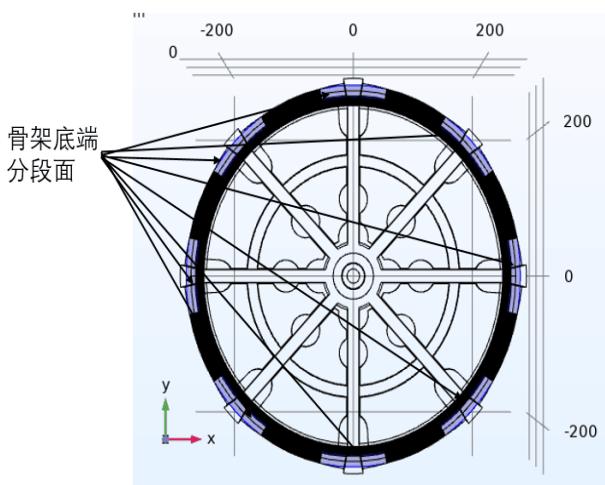


图 2 骨架底端均布面力

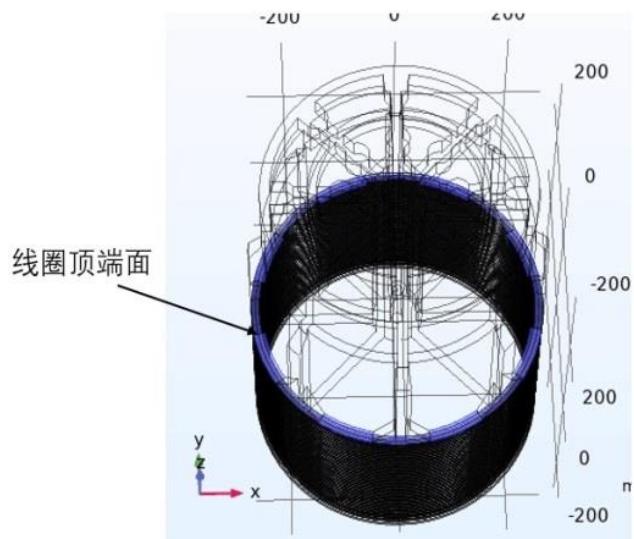


图 3 线圈顶端均布面力

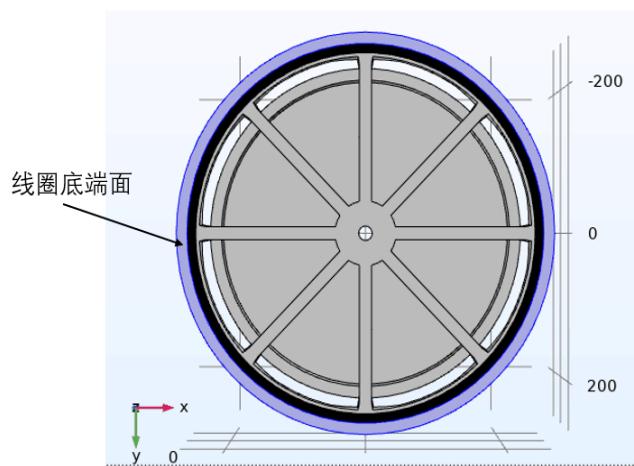


图 4 线圈底端均布面力

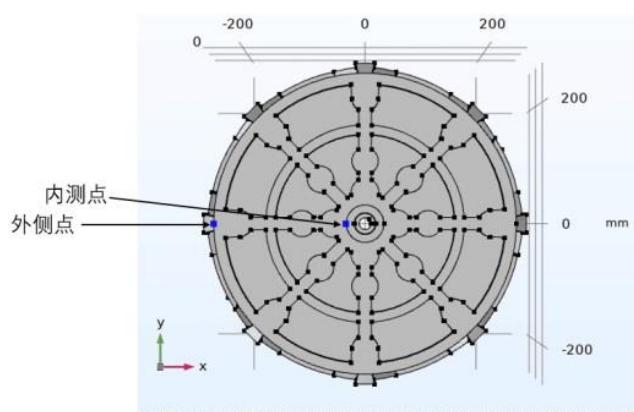


图 5 电动振动台内外测点示意

电磁力作用在电动振动台的线圈处，线圈将力传到骨架底端，再经骨架将力传到台面激励试件。因此首先考虑以下三种简化电磁力的方案（如图 2-图 4 所示）：

示)在电动振动台台面上定义内外节点(如图 5 所示),以电磁力均匀作用在线圈,内节点和外节点在 5-1000Hz 加速度幅频响应为基准,计算采用上述三种简化方案的加速度幅频响应与基准的相对误差随频率变化的曲线(如图 6-图 8 所示)。

由图 6-图 8 的相对误差随频率变化的曲线可以看出,将均匀分布在整个线圈上电磁力简化到线圈某一部分的电磁力的简化思路更为合理。但将电磁力简化到线圈某个部分均布面力的计算规模依旧较大,因此考虑选取其他电磁力作用位置,进一步减少电磁力作用点数外载荷作用点数  $n_1$ 。新的简化方案和相对误差曲线如图 9-图 13 所示。

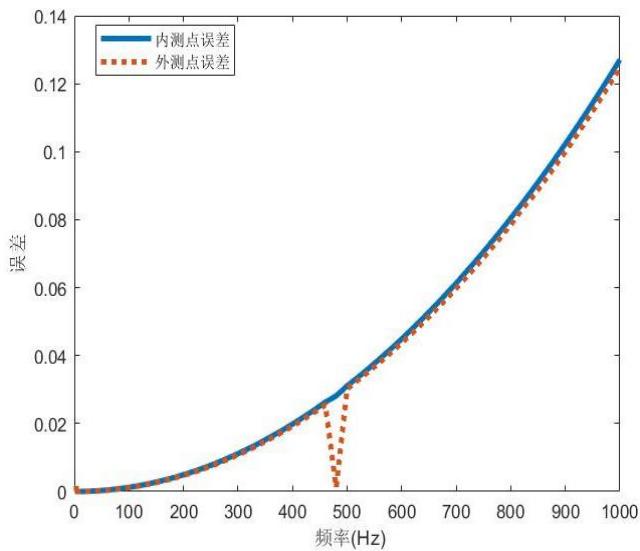


图 6 骨架底端均布面力相对误差曲线

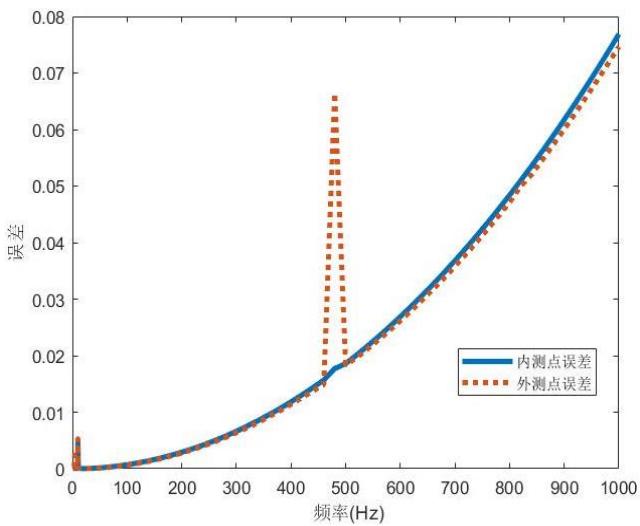


图 7 线圈顶端均布面力相对误差曲线

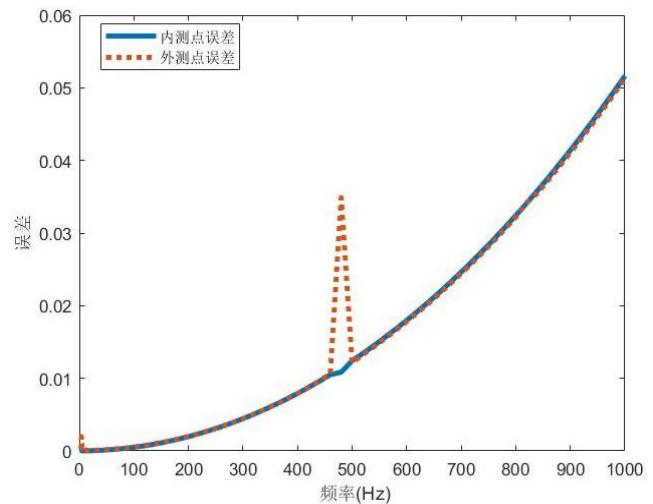


图 8 线圈底端均布面力相对误差曲线

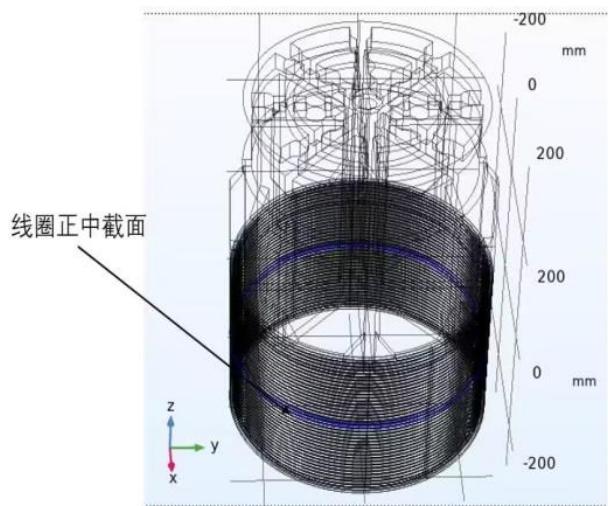


图 9 线圈中部均布面力

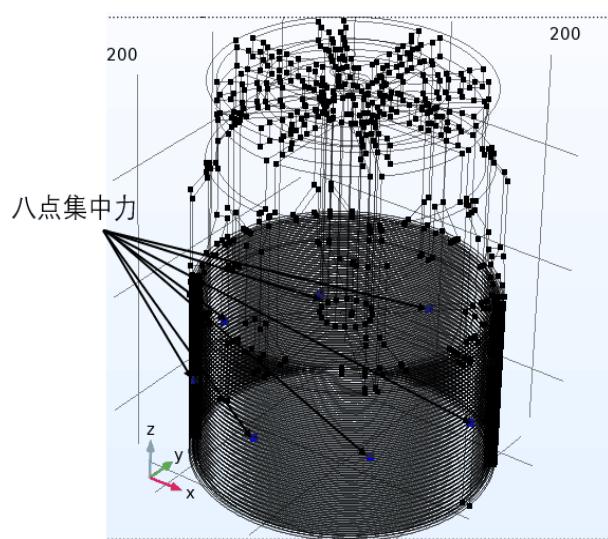


图 10 线圈中部 8 点集中力

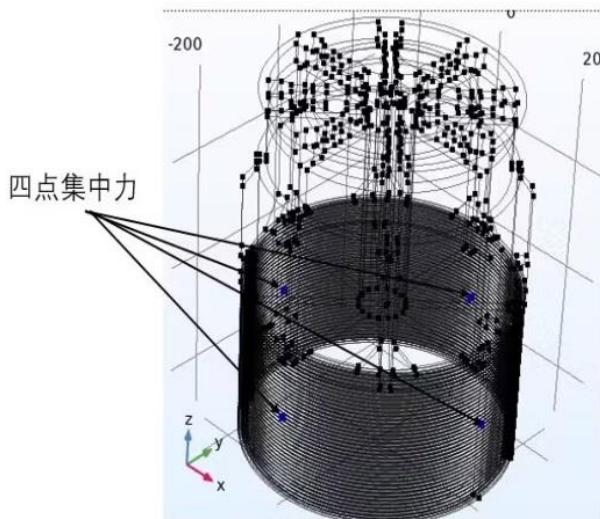


图 11 线圈中部 4 点集中力

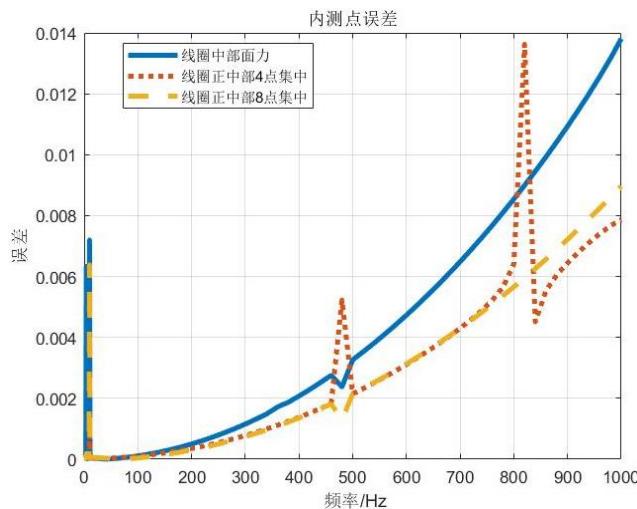


图 12 内测点相对误差曲线

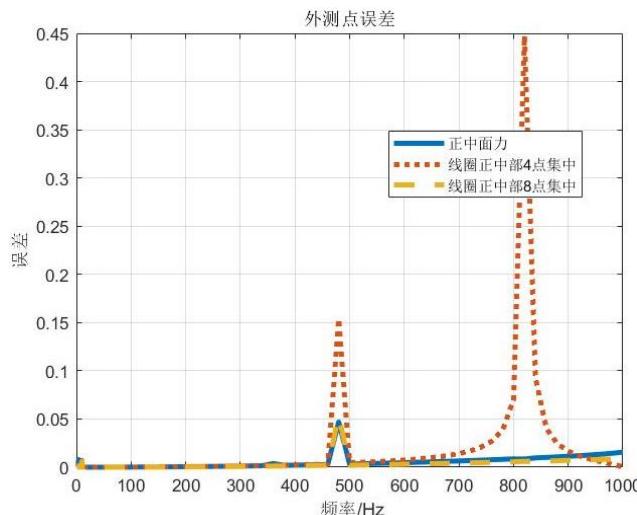


图 13 外侧点相对误差曲线

对于不同的三轴振动系统，液压球头在电动振动台的安装位置不同，因此在选择最终的简化电磁力的方案时，需综合考虑内测点、外测点的相对误差曲线。由图 12-图 13 可知，将电磁力简化到线圈中面四点集中力的方案虽然计算规模很小，但外测点的相对误差很大。将电磁力简化到线圈中面 1 集中力的方案计算规模不大且计算相对误差最小。因此本文采用将电磁力简化到线圈中面 8 点集中力的方案，获得简化后的电动振动台的数字化模型。

## 4 三轴振动系统总体频响函数矩阵构建

完成电动振动台所受电磁力的简化，获得简化后的电动振动台数字化建模后，开始构建三轴振动系统总体频响函数矩阵的工作。液压球头实现机械解耦的功能，即减小试验台非激振方向的位移对振动台传递的激振力的影响。在这里可以将液压球头处理成只传递轴向力的质量弹簧系统。将试验台简化成刚体，按下列步骤构建三轴振动系统总体频响函数矩阵：

- 利用式(5)构建 x、y、z 其中一个方向的电动振动台-液压球头子系统的总体频响函数矩阵。
- 利用式(5)构建 x、y、z 其中一个方向电动振动台-液压球头-转接棒子系统的总体频响函数矩阵。
- 再次使用(5)依次构建试验台与、y、z 其中一个方向电动振动台-液压球头-转接棒子系统的总体频响函数矩阵，完成三轴振动系统总体频响函数矩阵的构建。

完成三轴振动系统总体频响函数矩阵的构建后，可将系统的完整的频响函数矩阵写成如下形式：

$$H^C = \begin{bmatrix} H_{xx}^C & H_{xy}^C & H_{xz}^C \\ H_{yx}^C & H_{yy}^C & H_{yz}^C \\ H_{zx}^C & H_{zy}^C & H_{zz}^C \end{bmatrix} \quad (9)$$

矩阵中的元素  $H_{xx}^C, \dots, H_{zz}^C$  为  $8 \times 1$  的向量，以  $H_{xx}^C$  为例，它表示三轴振动系统中电动振动台 8 个集中力作用点到试验台上一点 X 方向响应的频响函数组成的向量，即  $H_{xx}^C = \{H_{xx_1}^C, H_{xx_2}^C, \dots, H_{xx_8}^C\}$ 。将其与式(7)一起带入到式(8)，有

$$a_x(f) = \sum_{i=1}^8 H_{xx_i}^C(f) \cdot F_{x_i}(f) A_0 \quad (10)$$

$A_1$  为常数。线圈任意两点的电流大小相等, 因此 X 方向的激振力与试验台上一点加速度响应的总体频响函数  $H_{a_x f_x}^C$  为

$$H_{a_x f_x}^C(f) = \sum_{i=1}^8 H_{x_i f_i}^C(f) \cdot A_0 \quad (11)$$

同理可以求出三轴振动系统总体频响函数矩阵。

$$H_{af}^C = \begin{bmatrix} H_{a_x f_x}^C & H_{a_y f_y}^C & H_{a_z f_z}^C \\ H_{a_y f_x}^C & H_{a_y f_y}^C & H_{a_y f_z}^C \\ H_{a_z f_x}^C & H_{a_z f_y}^C & H_{a_z f_z}^C \end{bmatrix} \quad (12)$$

求解出的部分传递函数曲线如图 14-16 所示

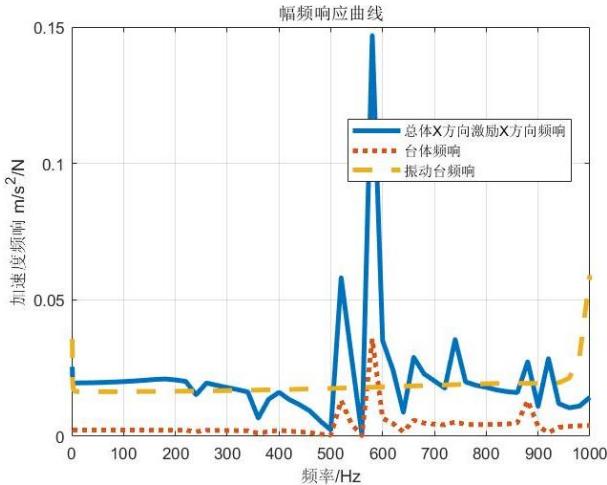


图 14 X 向激励到 X 向响应总体频响函数曲线

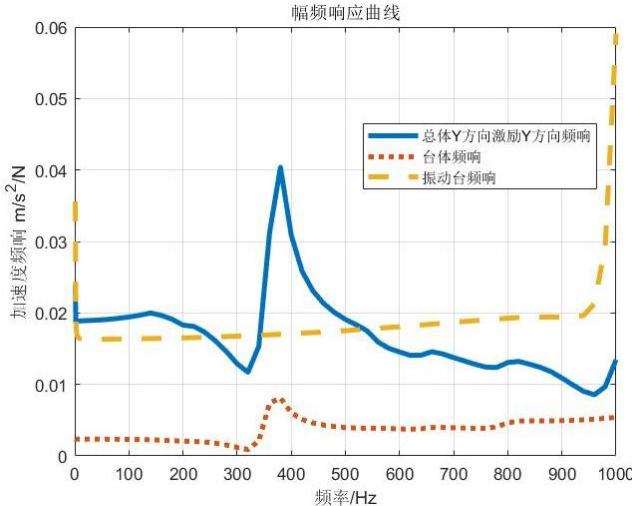


图 15 Y 向激励到 Y 向响应总体频响函数曲线

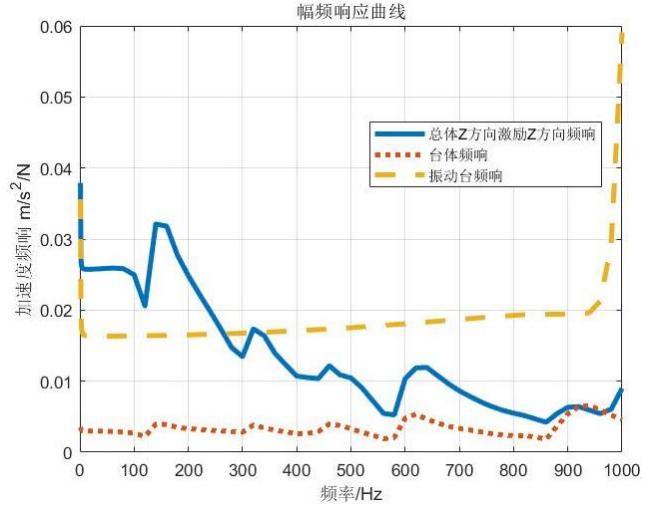


图 16 Z 向激励到 Z 向响应总体频响函数曲线

## 5 结语

本文研究了用于构建三轴振动系统完整频响函数矩阵的 Jetmundsen 频响函数法。针对电动振动台(三轴振动系统的子结构)开展数字化建模时, 遇到的计算规模过大导致无法进一步开展三轴振动系统完整频响函数组装工作的问题, 提出了多种简化作用在线圈上的电磁力的方案, 综合计算规模和计算误差, 获得了简化后的电动振动台数字化模型。在上述研究的基础上, 提出了构建三轴振动系统完整频响函数矩阵的方法, 获得了三轴振动系统总体频响函数矩阵, 完成了三轴振动系统的数字化建模。本文提出的三轴振动系统数字化建模方法对工程中使用的不同三轴振动系统的仿真计算有一定的参考价值。

## 参考文献

- [1] JETMUNDSEN, BJORN; BIELAWA, RICHARD; FLANNELLY, WILLIAMG. American Helicopter Society, Journal Vol. 33 (Jan. 1988): 55-64.
- [2] 李世超, 高宏力. 基于频域子结构综合法的丝杠寿命实验台的动态特性研究 [C]//中国工程机械学会. 第七届全国机械工程博士论坛论文集. [出版者不详], 2015: 290-297.
- [3] 胡海岩. 国防科工委“十五”规划教材 力学 机械振动基础 [M]. 国防科工委“十五”规划教材 力学 机械振动基础, 2005.
- [4] 白斌, 白广忱, 费成巍等. 改进的混合界面子结构模态综合法在失谐叶盘结构模态分析中的应用 [J]. 工程力学, 2015, 32 (04).

- [5] 王威. 基于频响函数的子结构混合建模研究及实现 [D]. 华中科技大学, 2012.
- [6] 吴仕超, 蔡国平. 刚架结构频域子结构法的实验研究 [J]. 实验力学, 2011, 26 (02): 196-201.
- [7] 杨志强, 臧朝平, 张根辈. 电磁激振器与结构的耦合动力学特性分析 [J]. 机械制造与自动化, 2022, 51 (02): 9-11.
- [8] 张逸波, 齐晓军, 张丽新. 200kN 振动台动圈建模与仿真分析 [J]. 航天器环境工程, 2009, 26 (03): 244-247.
- [9] 孟繁莹. 大型电动振动台动力学分析与数值模拟研究 [D]. 京工业大学, 2013.
- [10] 方政. 大型电动振动台动圈结构动力学建模与分析 [D]. 北京工业大学, 2018.
- [11] 夏天凉. 电动振动台有限元建模及其附加台面设计 [D]. 苏州大学, 2011.
- [12] 曾国英, 刘继光, 夏季. 三维振动台的仿真设计 [J]. 机械设计, 2005 (04): 46-48.
- [13] 向树红, 晏廷飞, 邱吉宝. 400kN 振动台虚拟试验仿真技术研究 [J]. 航天器环境工程, 2003 (04): 25-33.
- [14] 谢耀, 李久芳. 线性功率放大器模型设计及其系统辨识[J]. 电子工业专用设备, 2011, 40 (10): 55-59.
- [15] 王红霞. 高频谐振功率放大器性能仿真分析 [J]. 实验室科学, 2021, 24 (06): 53-56.
- [16] 刘金亭. 基于谐波控制的双频带功率放大器设计与仿真实现 [J]. 信息与电脑(理论版), 2022, 34 (04): 198-200.