

# 基于几何法和 DH 法混合的 6R 工业机器人逆解算法



朱柏旭<sup>1,2,\*</sup>, 李书伟<sup>3</sup>, 曾鸿涛<sup>1,2</sup>, 董珂同<sup>1,2</sup>, 管增翰<sup>1,2</sup>, 杜龙阳<sup>1,2</sup>, 杨子怡<sup>1,2</sup>, 刘清建<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>天津理工大学先进机电系统设计与智能控制重点实验室, 天津 300384

<sup>2</sup>天津理工大学机电工程国家级实验教学示范中心, 天津 300384

<sup>3</sup>杭州海康威视数字技术有限公司, 浙江杭州 310051

**摘要:** 机器人的运动学是影响机器人控制系统实时性能和稳定性的关键。逆运动学问题的求解又是运动学的一个基本问题。逆运动学的难点在于机械臂或机器人本身的几何形状千变万化以及描述笛卡尔空间与联合空间之间映射的非线性三角方程引起的复杂计算问题。因此, 目前没有较为通用的方法。传统矩阵法由于涉及到大量的矩阵运算, 其求解过程复杂。本文提出几何法和 DH 法混合法, 在逆运动学求解过程中, 采用几何法求解机械臂前 3 个关节角, 后 3 个关节采用矢量方式求解, 最终得出逆解。以常用三种工业机器人为例, 详细介绍几何法和 DH 法求解的过程, 然后采用 MATLAB 仿真, 验证了该几何解法的有效性。与传统算法常用的反变换矩阵法、迭代法等相比, 逆解相同的点数, 本文提出算法位姿误差基本相同, 且具有比较高的效率。因而可以看出本文所提出算法具有一定的优越性和实用性。

**关键词:** 工业机器人; 逆运动学; 几何法; DH 法

**DOI:** 10.57237/j.mse.2024.01.001

## Inverse Solution of 6-DOF Robot Based on Geometric Method and DH Method

Zhu Boxu<sup>1,2,\*</sup>, Li Shuwei<sup>3</sup>, Zeng Hongtao<sup>1,2</sup>, Dong Ketong<sup>1,2</sup>, Guan Zenghan<sup>1,2</sup>,  
Du Longyang<sup>1,2</sup>, Yang Ziyi<sup>1,2</sup>, Liu Qingjian<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Tianjin Key Laboratory for Advanced Mechatronic System Design and Intelligent Control, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China

<sup>2</sup>National Demonstration Center for Experimental Mechanical and Electrical Engineering Education, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China

<sup>3</sup>Hangzhou Hikvision Digital Technology Co., Ltd., Hangzhou 310051, China

**Abstract:** The kinematics of robots are key factors affecting the real-time performance and stability of robot control systems. The solution of inverse kinematics is also a fundamental problem in kinematics. The difficulty of inverse kinematics lies in the ever-changing geometric shapes of the robotic arm or robot itself, as well as the complex computational problems caused by nonlinear triangular equations that describe the mapping between Cartesian space and joint space. Therefore, there is currently no more universal method. The traditional matrix method involves a large

\*通信作者: 朱柏旭, zoomax61@gmail.com

number of matrix operations, and its solution process is complex. This article proposes a hybrid method of geometric method and DH method. In the process of inverse kinematics solving, the geometric method is used to solve the first three joint angles of the robotic arm, and the last three joint angles are solved using vector method, ultimately obtaining the inverse solution. Taking three commonly used industrial robots as examples, this paper provides a detailed introduction to the process of solving using geometric and DH methods, and then uses MATLAB simulation to verify the effectiveness of the geometric solution. Compared with the commonly used inverse transformation matrix method, iterative method, etc. in traditional algorithms, the pose error of the algorithm proposed in this paper is basically the same for the same number of inverse solutions, and it has relatively high efficiency. Therefore, it can be seen that the algorithm proposed in this article has certain advantages and practicality.

**Keywords:** Industrial Robot; Inverse Kinematics; Geometric Method; DH Method

## 1 引言

工业机器人运动学作为机器人学的一个重要研究领域, 其对机器人控制、机器人动力学和轨迹规划有着深远的影响, 而且直接关系到机器人控制、轨迹规划、离线编程精度, 是研究机器人动力学、轨迹规划和运动仿真的基础。它从几何或机构角度描述和研究了机器人运动特性[1], 而不考虑引起这些运动的力或力矩的作用, 分为正运动学与逆运动学。正运动学是对给定的机器人, 已知连杆几何参数和关节变量, 求机器人末端执行器相对于参考坐标系的位置和姿态。逆运动学是已知连杆几何参数和机器人末端执行器相对于参考坐标系的位置和姿态, 来求解能达到预期的位姿的机器人关节变量。

目前常用的机器人运动学方法主要是解析法和数值法, 解析法比如矩阵法[2-5] (DH 法), 它需要在每个关节上建立相应的坐标系, 采用坐标变换的方式建立正运动学模型, 在逆运动学求解上, 通常采用反变换的方法, 其求解过程复杂。数值解法[6-9]直接求解约束方程组, 可以通过迭代运算求得任何机构的实数解, 但通常不能得到全部解, 一般而言, 初值的选取及搜索算法对收敛性和精度影响较大。几何逆解法已经有部分学者研究[10-15], 针对某种结构, 有一定的局限性。

为了解决上述问题, 本文提出了一种基于几何法和 DH 法的混合算法, 以几何法的直观性, 并且大大减少了逆矩阵相乘的次数, 方法简单有效, 而且表达式简单, 便于工业控制实现。采用 MATLAB 进行运动仿真, 验证了几何解法的有效性。

## 2 基于几何法和 DH 法混合的 6 自由度机器人逆解算法

### 2.1 机器人运动学数学模型

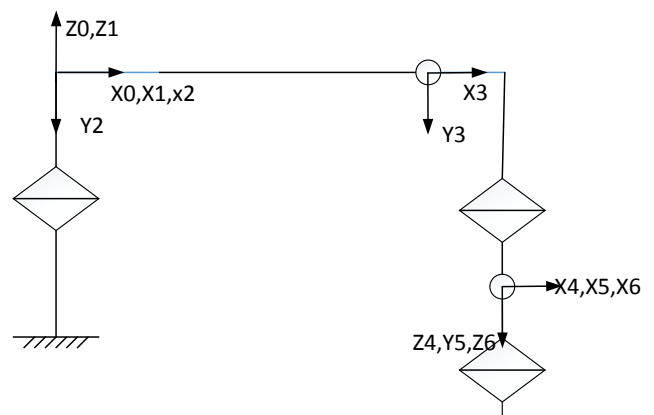
本文以常见的 6R 机器人为球形腕, 该机构特点满足 PIEPER 原则, 参考 Craig JJ 提出的机器人坐标系建立规则[4], 建立该机器人的坐标系, 对于常见的三种 6R 机器人建立几何简化模型, 这三种构型的区别在第一个关节和连杆上。同时建立相对应的 D-H 表, 它作用是为后三个角度的计算做基础即计算连杆坐标系的方向向量以便进行矢量运算。

以其连杆参数为基准, 将关节机器人简化为六轴机械连杆, 根据 PIEPER 准则可将  $\alpha_5$  作为后三轴共同的坐标原点, 从而可将机器人几何连杆简化。

构型 1 如图 1 所示。表 1 为该机器人的 D-H 表。

构型 2 如图 2 所示。表 2 为该机器人的 D-H 表。

构型 3 如图 3 所示。表 3 为该机器人的 D-H 表。



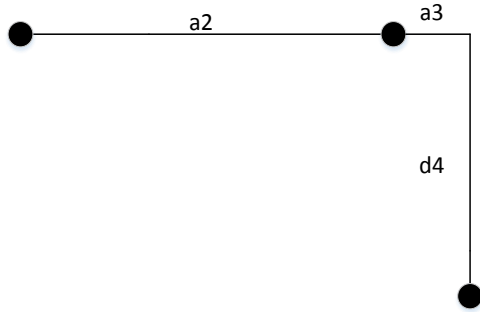


图 1 机器人构型 1 的结构简图（上）和平面几何简图（下）

表 1 构型 1 机器人 DH 表

关节 i	连杆转角 $\alpha_{i-1}(\circ)$	连杆转 $\alpha_i(\circ)$	连杆偏距 $d_i/\text{mm}$	关节角 $\theta_i/\text{mm}$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	-90	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	0	$\theta_3$
4	-90	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	90	0	0	$\theta_5$
6	-90	0	0	$\theta_6$

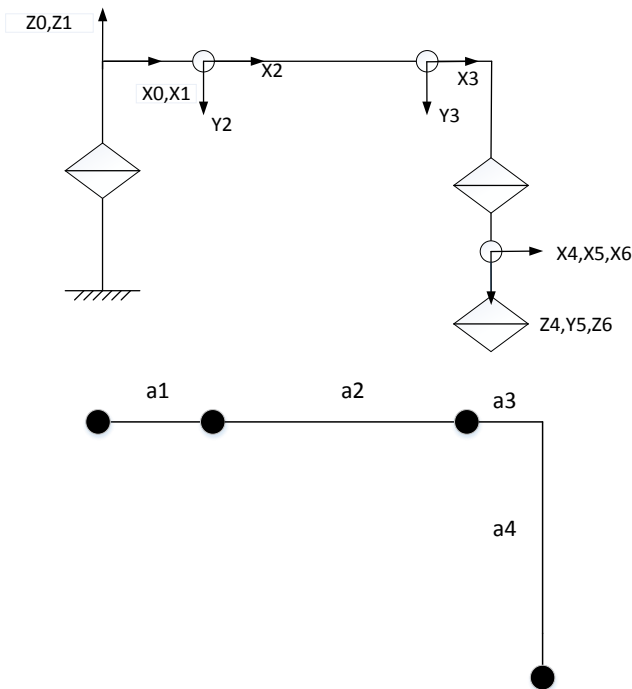


图 2 机器人构型 2 的结构简图（上）和平面几何简图（下）

表 2 构型 2 机器人 DH 表

关节 i	连杆转角 $\alpha_{i-1}(\circ)$	连杆转 $\alpha_i(\circ)$	连杆偏距 $d_i/\text{mm}$	关节角 $\theta_i/\text{mm}$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	-90	$a_1$	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	-90	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	90	0	0	$\theta_5$
6	-90	0	0	$\theta_6$

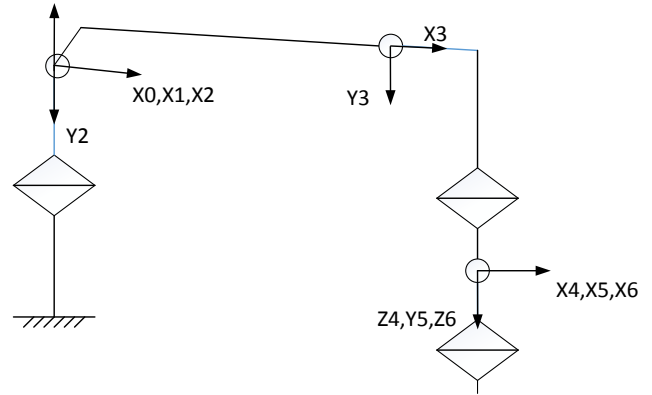


图 3 机器人构型 3 的结构简图（左）和空间几何简图（右）

表 3 构型 3 机器人 DH 表

关节 i	连杆转角 $\alpha_{i-1}(\circ)$	连杆转 $\alpha_i(\circ)$	连杆偏距 $d_i/\text{mm}$	关节角 $\theta_i/\text{mm}$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	-90	0	0	$\theta_2$
3	0	$a_2$	$d_3$	$\theta_3$
4	-90	$a_3$	$d_4$	$\theta_4$
5	90	0	0	$\theta_5$
6	-90	0	0	$\theta_6$

在机器人几何模型建立的基础上，机器人逆解首先取得末端连杆相对于基座坐标系的齐次变换矩阵，姿态用欧拉角  $zyz$  来表示。假设该矩阵可以由六个量表示为  $p_x, p_y, p_z, \alpha, \beta, \gamma$ 。其中  $p_x, p_y, p_z$  为机器人末端连杆的附带坐标系的原点的坐标， $\alpha, \beta, \gamma$  为机器人末端连杆的附带坐标系由欧拉角  $zyz$  形式的姿态描述。

针对三种构型，该混合法逆解都首先求解前三个关节角的角度值，然后在此基础上完成后三个关节求解。文中提到的 6R 机器人满足 Pieper 准则，故存在解析解。一般情况下，6R 机器人有 8 组逆解，当工业机器人处于特殊位姿时，逆解结果是少于 8 组解，最后选择一组逆解作为结果，一般来说是选择与当前位形较为接近的解。

## 2.2 关节角度 $\theta_1$ 的求解

首先关节 1 关节角度容易求出，考虑到反正切函数  $\text{atan}$  不能确定  $\theta_1$  所在象限，从而通过反正切函数  $\text{atan2}$  求得，对于构型 1 和构型 2，如图 4，关节角度 1 为

$$\theta_1 = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (1)$$

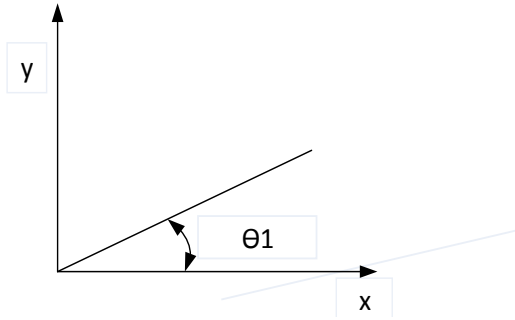


图 4 构型 1 和构型 2 的俯视图简化

而对于构型 3 如 puma560 机器人如图 5

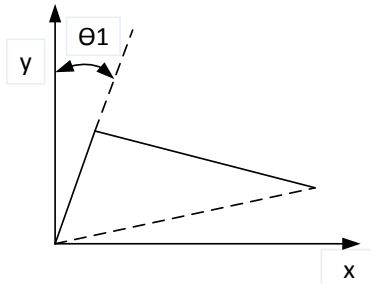


图 5 构型 3 的俯视图简化

关节 1 的角度推导如下：

$$\theta_{1\_pre} = \text{atan2}(p_y, p_x) \quad (2)$$

$$\theta_{1\_var} = \text{acos}\left(\frac{d_3}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) \quad (3)$$

式中  $\theta_{1\_pre}$ ,  $\theta_{1\_var}$  为计算关节 1 的角度的中间值。

关节角 1 有两种可能解如下：

$$\theta_1 = (\theta_{1\_pre} + \theta_{1\_var} - \pi/2) \quad (4)$$

$$\theta_1 = (\theta_{1\_pre} - \theta_{1\_var} - \pi/2) \quad (5)$$

## 2.3 关节角度 $\theta_2$ 与 $\theta_3$ 的求解

三种构型机器人的大臂小臂都可以转化三角形的

形式，如图 6 所示：

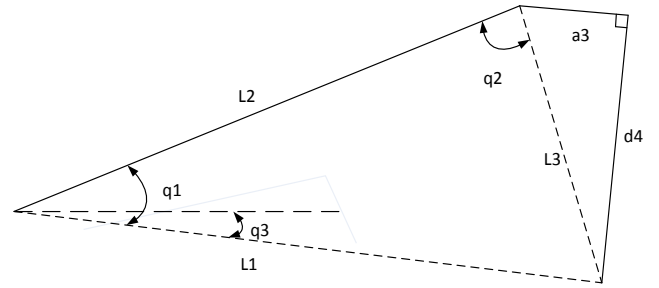


图 6 机器人几何结构简化图

图中的参数  $L_2$  为机器人大臂的长度，数值大小上等于连杆参数  $a_2$ ，参数  $L_3$  由连杆参数  $a_3$  和  $d_4$  通过几何关系来取得，几何意义是末端连杆坐标系原点与连杆 2 附带坐标系的原点空间直线距离。 $L_1$  与  $L_2$ ,  $L_3$  组成三角形，其中  $L_2$  与  $L_1$  之间的夹角为  $q_1$ ,  $L_2$  与  $L_3$  之间的夹角为  $q_2$ ,  $L_1$  与水平线之间的夹角为  $q_3$ 。

对于机器人构型 1 的角度  $q_1$  和  $q_2$  分别为

$$q_1 = \text{acos}\left(\frac{(L_2^2 + L_1^2 - L_3^2)}{2 * L_1 * L_2}\right) \quad (6)$$

$$q_2 = \text{acos}\left(\frac{(L_2^2 + L_3^2 - L_1^2)}{2 * L_2 * L_3}\right) \quad (7)$$

对于机器人构型 1 的角度  $q_3$  为

$$q_3 = \text{atan2}(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2}) \quad (8)$$

机器人构型 2 的角度  $q_3$  为

$$q_3 = \text{atan2}(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - a_1^2}) \quad (9)$$

机器人构型 3 的角度  $q_3$  为

$$q_3 = \text{atan2}(p_z, \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}) \quad (10)$$

关节 2 的角度有两种情况：

若  $\theta_2 = -(q_1 + q_3)$ ，则

$$\theta_3 = \pi - q_2 - \text{atan2}(d_4, a_3) \quad (11)$$

若  $\theta_2 = q_1 - q_3$ ，则

$$\theta_3 = q_2 + \text{atan2}(d_4, a_3) - \pi \quad (12)$$

## 2.4 关节角度 $\theta_4$ , $\theta_5$ 与 $\theta_6$ 的求解

常见的三种机器人机构特点满足 PIEPER 原则，后



$$\begin{cases} x = 500\cos(\pi t) \\ y = 500\sin(\pi t) \\ z = 0.1t-10 \end{cases}$$

式中  $t$  为参数,  $t=0:0.02:4$

机器人末端连杆姿态为  $\alpha=0:0.01:2$ ;  $\beta=0:0.02:4$ ;  $\gamma=0:0.05:10$ 。位置和姿态对应, 组合形成 201 个位姿。

由于三种构型验算方式相似, 故选择其中的一种即可, 在此选择构型进行仿真实验。对于机器人构型 2 的连杆参数:

$a_1=210\text{mm}$ ,  $a_2=600\text{mm}$ ,  $a_3=165\text{mm}$ ,  $d_4=718\text{mm}$

首先针对 201 个点, 依次用几何逆解算法进行求出个关节角的值, 把逆解出的各关节角再通过机器人运动学正解来求得末端连杆实际位姿。得出结果, 如图 9 所示。机器人构型 2 的逆解结果, 如图 10, 从图 10 中发现关节发现关节角 1 和关节角 4 有突变, 但是这个突变只是关节角数值上的突变, 实际上每一步的电机转角变化的变化都是比较小的。

与期望位姿进行比较, 如表 4 和 5, 该位置与期望位置相差极小, 达到  $10^{-13}$ 。

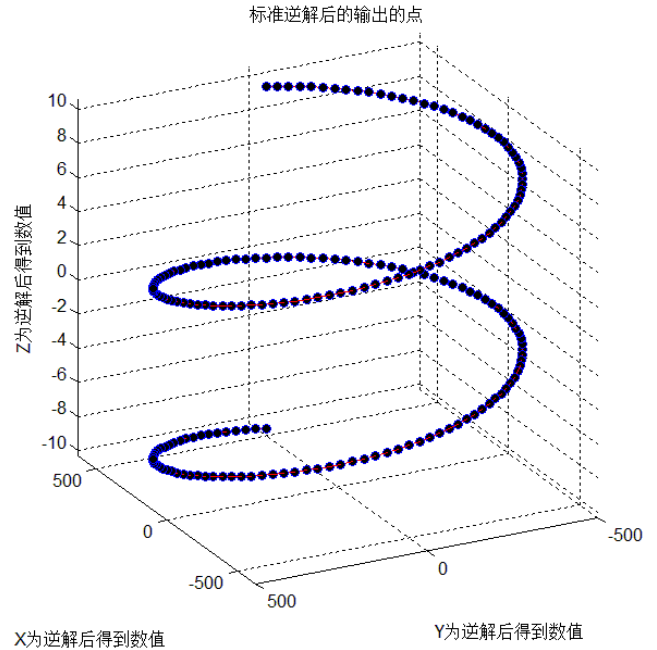


图 9 实际位置与期望位置对比

(图中实线是期望路径的位置, 圆点是通过几何法逆解再正解后末端连杆的位置)

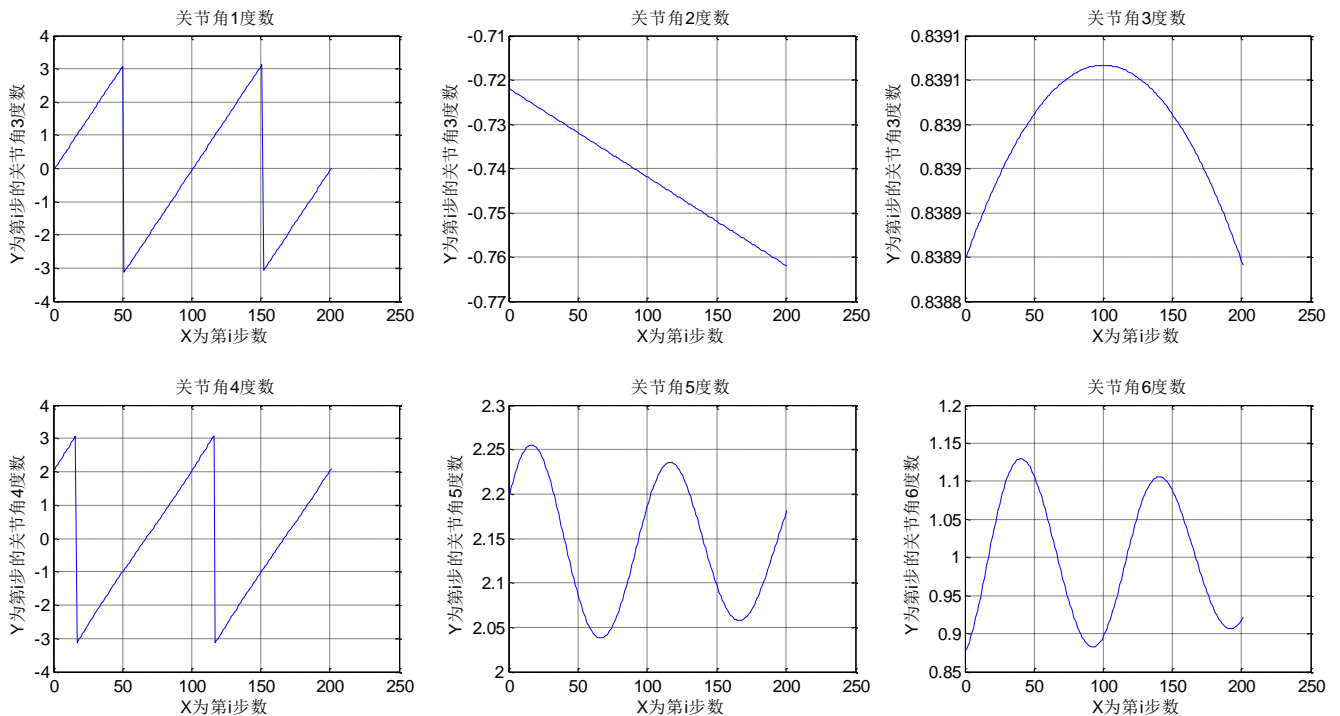


图 10 机器人构型 2 的逆解关节角结果图 (本文算法)



表 4 本文算法输出位姿和期望位姿对照表

期望位置						输出位姿（本文算法逆解后正解求得）					
x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
184.062	464.888	-8.000	0.190	0.380	0.950	184.062	464.888	-8.000	0.190	0.380	0.950
-385.257	318.711	-6.000	0.390	0.780	1.950	-385.257	318.711	-6.000	0.390	0.780	1.950
-422.164	-267.913	-4.000	0.590	1.180	2.950	-422.164	-267.913	-4.000	0.590	1.180	2.950
124.345	-484.291	-2.000	0.790	1.580	3.950	124.345	-484.291	-2.000	0.790	1.580	3.950
499.013	-31.395	0.000	0.990	1.980	4.950	499.013	-31.395	0.000	0.990	1.980	4.950
184.062	464.888	2.000	1.190	2.380	5.950	184.062	464.888	2.000	1.190	2.380	5.950
-385.257	318.711	4.000	1.390	2.780	6.950	-385.257	318.711	4.000	1.390	2.780	6.950
-422.164	-267.913	6.000	1.590	3.180	7.950	-422.164	-267.913	6.000	1.590	3.180	7.950
124.345	-484.291	8.000	1.790	3.580	8.950	124.345	-484.291	8.000	1.790	3.580	8.950

表 5 DH 法输出位姿和期望位姿对照表

期望位置						输出位姿（反变化法逆解后正解求得）					
x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	x	y	z	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
184.062	464.888	-8.000	0.190	0.380	0.950	184.062	464.888	-8.000	0.190	0.380	0.950
-385.257	318.711	-6.000	0.390	0.780	1.950	-385.257	318.711	-6.000	0.390	0.780	1.950
-422.164	-267.913	-4.000	0.590	1.180	2.950	-422.164	-267.913	-4.000	0.590	1.180	2.950
124.345	-484.291	-2.000	0.790	1.580	3.950	124.345	-484.291	-2.000	0.790	1.580	3.950
499.013	-31.395	0.000	0.990	1.980	4.950	499.013	-31.395	0.000	0.990	1.980	4.950
184.062	464.888	2.000	1.190	2.380	5.950	184.062	464.888	2.000	1.190	2.380	5.950
-385.257	318.711	4.000	1.390	2.780	6.950	-385.257	318.711	4.000	1.390	2.780	6.950
-422.164	-267.913	6.000	1.590	3.180	7.950	-422.164	-267.913	6.000	1.590	3.180	7.950
124.345	-484.291	8.000	1.790	3.580	8.950	124.345	-484.291	8.000	1.790	3.580	8.950

对于姿态，本文提出算法逆解也表明与此相差极小，几乎一样。从时间效率上来对比，从逆解 200 个点来做五次实验，结果如表 6。

表 6 算法的运行时间

实验次数	1(s)	2(s)	3(s)	4(s)	5(s)	平均值
DH 法（反变换法）	0.0990	0.1050	0.1050	0.0940	0.1010	0.1008
本文算法	0.0990	0.0900	0.0960	0.0830	0.1000	0.0936

4 结论

综上，通过对 6R 关节机器人建立数学模型，在此基础上提出一种基于几何法和 DH 法的混合逆解算法。

(1) 针对常见 3 种构型工业机器人逆解问题，传统矩阵法其求解过程复杂。本文提出基于几何法和 DH 法的混合算法，具有简单直观，表达式简单的特点。

(2) 与传统成熟的矩阵法（反变换法）进行比较，逆解相同的点数，本文提出算法位姿误差几乎相同，但是本文算法具有较高的计算效率。

参考文献

[1] 蔡自兴. 机器人学 (第三版) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2015.

[2] 李宪华, 郭永存, 张军, et al. 模块化六自由度机械臂逆运动学解算与验证 [J]. 农业机械学报, 2013, 44(4): 246-251.

[3] Kucuk S, Bingul Z. The inverse kinematics solutions of industrial robot manipulators [C]. IEEE International Conference on Mechatronics. 2004.

[4] 董明晓, 周以齐, 张明勤. PUMA 机器人逆运动学求解新方法 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2000(10): 19-21.

- [5] 赵轲, 李元宗, 李晨. 利用三关节汇交特点逆解机器人关节变量 [J]. 太原理工大学学报, 2002(06): 637-639+646.
- [6] 刘达, 王田苗. 一种解析和数值相结合的机器人逆解算法 [J]. 北京航空航天大学学报, 2007, 33(6): 727-730.
- [7] Goldenberg A A, Benhabib B, Fenton R G. A complete generalized solution to the inverse kinematics of robots [J]. IEEE Journal of Robotics & Automation, 1985, 1(1): 14-20.
- [8] 王宪, 杨国梁, 张方生, et al. 基于牛顿-拉夫逊迭代法的 6 自由度机器人逆解算法 [J]. 传感器与微系统, 2010, 29(10): 116-118.
- [9] Li J, Yu H, Shen N Y, et al. A novel inverse kinematics method for 6-DOF robots with non-spherical wrist [J]. Mechanism and Machine Theory, 157 [2023-12-02]. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104180.
- [10] 汪伟, 于海武, 周文贤. 6R 机器人的几何求逆算法 [J]. 科学技术与工程, 2017, 17(6): 83-87.
- [11] 卢喆, 郑松. 基于几何法和旋量理论的 6 自由度机器人逆解算法 [J]. 机械传动, 2017, 41(06): 111-114.
- [12] 程浩田, 祝锡晶, 冯昕宇等. 6R 工业机器人几何求逆优化算法及仿真分析 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2021(04): 75-79.
- [13] 刘国平, 杨先永, 钟飞飞等. 六自由度机械臂运动学旋量逆解及简化算法 [J]. 组合机床与自动化加工技术, 2021(09): 11-15.
- [14] 刘劲松, 常斌, 游达章. 三自由度机械臂运动学分析与轨迹规划算法研究 [J]. 湖北工业大学学报, 2018, 33(4): 4. DOI: CNKI:SUN:HGBX.0.2018-04-007.
- [15] Schrock P H P. A new and efficient algorithm for the inverse kinematics of a general serial 6R manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory: Dynamics of Machine Systems Gears and Power Transmissions Robots and Manipulator Systems Computer-Aided Design Methods, 2007, 42(1).