基于几何凸集的几何凸函数

王淑红[*], 刘倩

内蒙古民族大学数理学院, 内蒙古通辽 028000

摘要: 几何凸函数是与凸函数平行的一个概念，通过一种变换或者不等式给出，它推广了凸函数的很多控制不等式理论和方法。随着几何凸集概念的提出，基于几何凸集的几何凸函数的性质被研究，但是关于几何凸集和几何凸函数的性质并未完善。本文通过文献研究法、分析综合法和归纳演绎法进一步探讨了几何凸集和几何凸函数的性质。首先在几何凸集概念的基础上，定义了集合的几何凸包和几何凸组合，给出了一个判定几何凸集的等价条件和一个几何凸组合的例子。然后利用上图给出了几何凸函数的等价定义，得到了几何凸函数的一个判定定理。同时，定义函数的几何凸包，利用函数的几何凸包得到了几何凸函数的另一个判定定理。最后，研究了几何凸函数在几种运算下保持几何凸性的不变性质以及几何凸函数的局部全局性质。本文的研究结果将进一步丰富几何凸性理论。

关键词: 几何凸函数; 几何凸包; 几何凸组合; 上图

DOI: 10.57237/j.wjms.2022.01.003

Geometric Convex Function Based on Geometric Convex Set

Wang Shuhong[*], Liu Qian

College of Mathematics and Physics, Inner Mongolia Minzu University, Tongliao 028000, China

Abstract: Geometric convex function is a parallel concept with convex function and is given by a transformation or an inequality, which generalizes the theory and method of control inequality for convex function. With the concept of geometric convex set being put forward, the properties of geometric convex function based on geometric convex set have been studied. But the properties of geometric convex set and geometric convex function are not perfect. In this paper, we further discuss the properties of geometric convex set and geometric convex function by literature research, analysis, synthesis, induction and deduction. Firstly, based on the concept of geometric convex set, the geometric convex hull and geometric convex combination of a set are defined, and an equivalent condition for judging geometric convex set and an example of geometric convex combination are given. Then, the equivalent definition of geometric convex function is given by using the epigraph, and a judgment theorem of geometric convex function is obtained. In addition, the geometric convex hull of the function is defined, and another judgment theorem of geometric convex function is also obtained by using geometric convex hull of the function. Finally, the invariance of geometric convexity under several operations and the local and global properties of geometric convex functions are studied. The results of this paper will further enrich the theory of geometric convexity.

基金项目: 内蒙古自治区直属高校基本科研业务费项目 (2022); 内蒙古民族大学博士科研启动基金项目 (BS402).

[*]通信作者: 王淑红, shuhong7682@163.com

收稿日期: 2022-10-20; 接受日期: 2022-11-15; 在线出版日期: 2022-12-01

Keywords: Geometric Convex Function; Geometric Convex Hull; Geometric Convex Combination; Epigraph

1 引言

几何凸函数是凸函数的推广，是发现和证明不等式的一个强有力的工具。早在 1988 年和 1990 年，李世杰[1]和 L. G. Lucht [2]就利用一种变换讨论过几何凸函数的一些性质，但它的概念却是在 1992 年被 J. Matkowski [3]正式提出，从此受到国内外专家学者的广泛关注。2000 年，C. P. Niculescu [4]给出了几何凸函数的判断准则和具有几何凸性的几个具体函数，并建立了 Popoviciu 类不等式；同年，C. E. Finol 和 M. Wójtowicz [5]得到了一维几何凸函数的微分判据；2002 年，杨露[6]研究了矩阵上的一些几何凸函数不等式；2004 年，吴善和[7]给出了几何凸函数的判定方法并建立了几何凸函数的 Jensen 型不等式；同年，张小明[8-9]定义了几何凸集和 Schur-几何凸函数，得到了判定几何凸函数和 Schur—几何凸函数的几个定理，建立了几何凸函数的 Hadamard 型不等式；2013 年，宋振云[10]建立了几何凸函数的积分型 Jensen 不等式及其加权形式。近年来有关几何凸函数以及广义几何凸函数的研究越来越深入，m- 几何凸函数，s- 几何凸函数，h- 几何凸函数等广义几何凸函数相继被提出并被研究，具体可参考文献[11-14]。值得注意的是几何凸集概念的提出要晚于几何凸函数近 20 年的时间，因而几何凸集中的一些性质并未得到充分研究。本文进一步探究几何凸集的相关性质，给出了集合的几何凸包和几何凸组合的概念，并在上图的基础上给出了几何凸函数的等价定义，得到了几何凸函数的一些判定定理和基本性质。

2 预备知识

定义 1（[15]）设函数 $f(x)$ 在区间 $I\subseteq R_+$ 上有定义且连续。如果对于任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n>0$（$n\geq 2$），当 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，有

$$(i)\quad f\left(\sqrt{x_1x_2}\right)\leq\sqrt{f\left(x_1\right)f\left(x_2\right)},$$

$$(ii)\quad f\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right)\leq\sqrt[n]{f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)},$$

$$(iii)\quad f\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\right)\leq f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_n}(x_n)$$

之一成立，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是几何下凸的；若不等式反向，称 $f(x)$ 在区间 I 上是几何上凸的。

定理 1（[6]）设函数 $f(x)$ 为区间 $I\subseteq R_+$ 上的连续正值几何凸函数，$\alpha,\beta>0$，且 $\alpha+\beta=1$，则对任意的 $x,y\in R_+$，有

$$f\left(x^{\alpha}y^{\beta}\right)\leq f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y),$$

其中等号成立当且仅当 $x=y$。

定义 2（[8, 15]）设集合 $E\subseteq R_+^n$，$\alpha,\beta>0$，且 $\alpha+\beta=1$。如果对任意的 $x,y\in R_+^n$ 都有 $x^{\alpha}y^{\beta}\in E$，称 E 为几何凸集。

引理 1（[15]）有限个或者无限个几何凸集的交也为几何凸集。

定义 3（[15]）设 $E\subseteq R_+^n$ 为几何凸集，$f:E\to(0,+\infty)$ 为连续函数。若以下条件之一成立:

(1) 对任意的 $x,y\in E$，有

$$f\left(\sqrt{xy}\right)\leq\sqrt{f(x)f(y)}$$

(2) 任取 $\alpha\in[0,1]$，$x,y\in E$，记 $\beta=1-\alpha$，有

$$f\left(x^{\alpha}y^{\beta}\right)\leq f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y)$$

(3) 任取自然数 $n\geq 2$，$\lambda_i>0,\ x_i\in E,\ i=1,2,\cdots,n$，当 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，有

$$f\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}\right)\leq f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_n}(x_n)$$

则称 $f(x)$ 为集合 E 上的几何凸函数；若不等式反向，称 $f(x)$ 为集合 E 上的几何凹函数。

定义 4（[16]）设函数 $f:S\subseteq R^n\to[-\infty,+\infty]$，集合

$$\left\{(x,\mu)\middle|x\in S,\mu\in R,\mu\geq f(x)\right\}$$

称为函数 f 的上图，记为 $epi\,f$。

3 主要结论

定义 5 设集合 $E \subseteq R_+^n$，包含 E 的所有几何凸集的交称为 E 的几何凸包，记为 G-Conv$E$。

注：由引理 1，显然 G-Conv$E$ 为几何凸集。

定义 6 设集合 $E \subseteq R_+^n$，对于任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in E$，称

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$$

为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的几何凸组合，其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2 \cdots n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。

定理 2 集合 $E \subseteq R_+^n$ 是几何凸集当且仅当 E 包含其内元素的所有几何凸组合。

证明：若集合 E 包含其内元素的所有几何凸组合，则 E 的任意两个元素的几何凸组合也是 E 的元素，所以 E 是几何凸集。

反之，设 $E \subseteq R_+^n$ 是几何凸集，那么对于任意的 $x_1, x_2 \in E$，$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$，且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$，有

$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \in E。$$

设对于任意的 $x_i \in E$，$\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2 \cdots n-1)$，当 $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$ 时结论成立，则对于任意的 $x_i \in E$，$\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2 \cdots n)$，当 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ 时，考虑

$$x = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n},$$

一定可以找到一个 $\lambda_i \neq 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$，不妨设 $\lambda_1 \neq 1$，则

$$x = x_1^{\lambda_1} \left(x_2^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}} \cdots x_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}} \right)^{1-\lambda_1},$$

显然 $\frac{\lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n}{1 - \lambda_1} = 1$，由假设，

$$y = x_2^{\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}} \cdots x_n^{\frac{\lambda_n}{1-\lambda_1}} \in E。$$

再由集合 E 的几何凸性，

$$x = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_m^{\lambda_m} = x_1^{\lambda_1} y^{1-\lambda_1} \in E,$$

即集合 E 包含其内元素的所有几何凸组合。

定理 3 设集合 $E \subseteq R_+^n$，则 E 的几何凸包 G-Conv$E$ 由 E 中元素的所有几何凸组合构成。

证明：设 E 中元素的所有几何凸组合的集合为 C，先证 $C \subseteq$ G-Conv$E$。因为 G-Conv$E$ 是几何凸集，由定理 2，G-Conv$E$ 是包含其内元素的所有几何凸组合，又 $E \subseteq$ G-Conv$E$，所以 $C \subseteq$ G-Conv$E$。

再证 G-Conv$E \subseteq C$。首先证明 C 为几何凸集。对任意的 $x, y \in C$，有

$$x = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_m^{\lambda_m} \in C, \quad y = y_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \cdots y_r^{\mu_r} \in C,$$

其中 $x_i, y_j \in E, \lambda_i, \mu_j > 0 (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, r)$，且 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，$\sum_{j=1}^{r} \mu_j = 1$。当 $0 < \lambda < 1$ 时，有

$$x^{1-\lambda} y^{\lambda} = x_1^{(1-\lambda)\lambda_1} x_2^{(1-\lambda)\lambda_2} \cdots x_m^{(1-\lambda)\lambda_m} y_1^{\lambda\mu_1} y_2^{\lambda\mu_2} \cdots y_r^{\lambda\mu_r},$$

而

$$(1-\lambda)\lambda_1 + (1-\lambda)\lambda_2 + \cdots + (1-\lambda)\lambda_m + \lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 + \cdots + \lambda\mu_r = 1。$$

所以 $x^{1-\lambda} y^{\lambda} \in C$，即 C 为几何凸集。又因为 $E \subseteq C$，且 G-Conv$E$ 是包含 E 的最小几何凸集，所以 G-Conv$E \subseteq C$。

综上，G-Conv$E$=C，即 G-Conv E 是由 E 中元素的所有几何凸组合构成的。

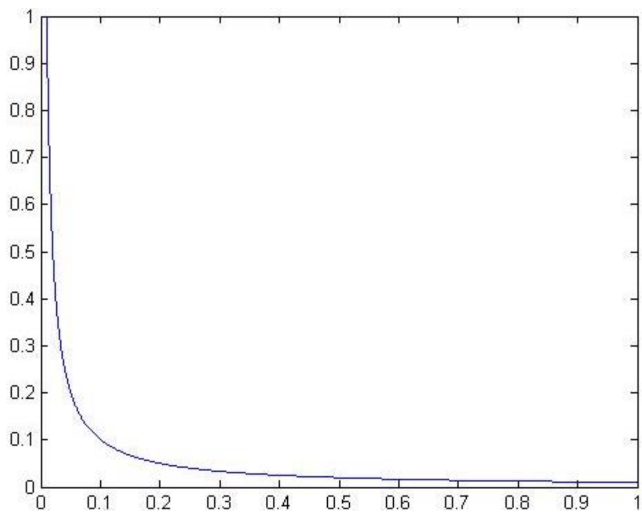

图 1 几何凸组合

例 1 设集合 $E = \{(1, 0.01), (0.01, 1)\}$，则图 1 中曲线是 E 中点（1,0.01）和（0.01,1）的几何凸组合。

定理 4 设 $E \subseteq R_+^n$ 是几何凸集，则函数

$f:E\subseteq R_+^n\to R_+$ 是几何凸函数的充要条件是 epi f 是几何凸集。

证明：设 epi f 是几何凸集，则对任意的 $(x,\alpha),(y,\beta)\in$ epi f，$\lambda,\mu\ge 0$ 且 $\lambda+\mu=1$，有

$$(x,\alpha)^{\lambda}(y,\beta)^{\mu}=\left(x^{\lambda}y^{\mu},\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\right)\in \text{epi}f\ 。$$

又由 E 的几何凸性和上图的定义，知

$$f\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)\le\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}, \tag{1}$$

其中 $x^{\lambda}y^{\mu}\in E$。再由 α,β 的任意性，取

$$f(x)=\alpha,\ f(y)=\beta$$

时不等式（1）也成立，即

$$f\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)\le f^{\lambda}(x)f^{\mu}(y)$$

所以函数 f 是集合 E 上的几何凸函数。

设 $f:E\to R_+$ 是集合 E 上的几何凸函数，则对任意的 $x,y\in E$，$\lambda,\mu\ge 0$，且 $\lambda+\mu=1$，有

$$f\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)\le f^{\lambda}(x)f^{\mu}(y)\ 。\tag{2}$$

下面证明 epi f 是几何凸集。对任意的 (x,α)，$(y,\beta)\in$ epi f，由上图定义知

$$f(x)\le\alpha,\ f(y)\le\beta\ 。$$

因此，由不等式（2）可以得到

$$f\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)\le\alpha^{\lambda}\beta^{\mu},$$

即

$$(x,\alpha)^{\lambda}(y,\beta)^{\mu}=\left(x^{\lambda}y^{\mu},\alpha^{\lambda}\beta^{\mu}\right)\in epi\ f\ 。$$

故 epi f 是几何凸集。

因此，可以得到几何凸函数的一个等价定义：

定义 7 设 $E\subseteq R_+^n$ 是一个几何凸集，$f:E\to R_+$，如果

$$\text{epi}\ f=\left\{(x,\mu)\in R^{n+1}\,\middle|\,x\in E,\mu\in R,f(x)\le\mu\right\}$$

是几何凸集，则称 f 是集合 E 上的几何凸函数；若 $-f$ 是集合 E 上的几何凸函数，则称 f 是集合 E 上的几何凹函数。

定义 8 设 $E\subseteq R_+^n$ 是一个几何凸集，$f:E\to R_+$ 是集合 E 上的函数，则函数

$$\text{G-Conv}\ f(x)=\inf\left\{\mu\in R:(x,\mu)\in\text{G-Conv}(\text{epi}\ f)\right\}$$

称为 f 的几何凸包，记为 G-Conv f。

注：由定义 7，显然 G-Conv f 是几何凸函数。

定理 5 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集，$f:E\to R_+$ 是集合 E 上的函数，则 f 是几何凸函数当且仅当 f=G-Conv f。

证明：设 f 是几何凸函数，则对任意的 $x\in E$，显然

$$\text{G-Conv}\ f(x)\le f(x)\ 。$$

现在需要证明 $f(x)\le$ G-Conv $f(x)$。设 $(x,\mu)\in$ G-Conv(epi f)，则由定理 3 知

$$\begin{aligned}(x,\mu)&=(x_1,\mu_1)^{\lambda_1}(x_2,\mu_2)^{\lambda_2}\cdots(x_m,\mu_m)^{\lambda_m}\\&=\left(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_m^{\lambda_m},\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\cdots\mu_m^{\lambda_m}\right),\end{aligned}\tag{3}$$

其中 $(x_i,\mu_i)\in$ epi f，$\lambda_i\ge 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$。再利用函数 f 的几何凸性和上图定义，有

$$f(x)=f(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_m^{\lambda_m})\le f^{\lambda_1}(x_1)f^{\lambda_2}(x_2)\cdots f^{\lambda_m}(x_m)\le\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_1}\cdots\mu_m^{\lambda_m}=\mu.$$

因此

$$f(x)\le\inf\left\{\mu|(x,\mu)\in\text{G-Conv}(\text{epi}f)\right\}=\text{G-Conv}f(x)\ 。$$

综上 f=G-Conv$f$。

反之，设 f=G-Conv$f$，因为 G-Conv$f$ 是几何凸函数，所以 f 是几何凸函数。

定理 6 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集。如果 $f_i:E\to R_+$ 是几何凸函数，$i=1,2,\cdots,m$，则

$$f=\prod_{i=1}^{m}(f_i)^{a_i}$$

也是几何凸函数，其中 $a_i\ge 0$，$i=1,2,\cdots,m$。

证明：对任意的 $x,y\in E$，$\lambda,\mu\ge 0$，且 $\lambda+\mu=1$，有

$$\begin{aligned}f\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)&=\prod_{i=1}^{m}\left(f_i\left(x^{\lambda}y^{\mu}\right)\right)^{a_i}\le\prod_{i=1}^{m}f_i^{a_i\lambda}(x)f_i^{a_i\mu}(y)\\&=\left(\prod_{i=1}^{m}f_i^{a_i}(x)\right)^{\lambda}\left(\prod_{i=1}^{m}f^{a_i}{}_i(y)\right)^{\mu}=\left(f(x)\right)^{\lambda}\left(f(y)\right)^{\mu},\end{aligned}$$

即 f 是几何凸函数。

定理 7 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集。如果 $f_i:E\to R_+(i=1,2,\cdots,m)$ 是几何凸函数，则 $f=\max_{1\le i\le m}\{f_i\}$ 也是几何凸函数。

证明：对任意的 $x,y\in E$，$\lambda,\mu\ge 0$，且 $\lambda+\mu=1$，存在 $t\in\{1,2,\cdots,m\}$ 满足

$$f\left(x^\lambda y^\mu\right)=\max_{1\le i\le m}\left\{f_i\left(x^\lambda y^\mu\right)\right\}=f_t\left(x^\lambda y^\mu\right)。$$

利用 f_t 的几何凸性，得

$$f\left(x^\lambda y^\mu\right)=f_t\left(x^\lambda y^\mu\right)\le f_t^\lambda(x)f_t^\mu(y)=f^\lambda(x)f^\mu(y)。$$

因此，$f=\max_{1\le i\le m}\{f_i\}$ 是几何凸函数。

定理 8 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集，$f:E\to R_+$ 是几何凸函数，则 f 的任意局部极小值是全局最小值。

证明：设 $x^*\in E$ 是函数 f 的一个局部极小点。运用反证法，假设存在一个 $y\in E$ 满足 $f(y)<f(x^*)$。由于 f 是几何凸函数，对一些很小的 $\mu>0$，有

$$f\left(\left(x^*\right)^{1-\mu}y^\mu\right)\le f^{1-\mu}\left(x^*\right)f^\mu(y)=f\left(x^*\right)\cdot\left(\frac{f(y)}{f\left(x^*\right)}\right)^\mu<f\left(x^*\right).$$

这与 x^* 是函数 f 的局部极小点矛盾。因此，f 的任意局部极小值都是全局最小值。

定理 9 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集，$f:E\to R_+$ 是几何凸函数，$t=\inf_{x\in E}f(x)$，则集合

$$U=\left\{x\in E:f(x)=t\right\}$$

是几何凸集。

证明：设 $x,y\in U$，$\lambda,\mu\ge 0$，且 $\lambda+\mu=1$，有

$$t\le f\left(x^\lambda y^\mu\right)\le f^\lambda(x)f^\mu(y)=t^\lambda t^\mu=t。$$

即 $x^\lambda y^\mu\in U$，所以 E 是几何凸集。

定理 10 设 $E\subseteq R_+^n$ 是几何凸集，$f:E\to R_+$ 是几何凸函数，则对任意的 $\alpha>0$，f 的下 α 水平集

$$L_{\le\alpha}=\left\{x\in E:f(x)\le\alpha\right\}$$

是几何凸集。

证明：对任意的 $x,y\in L_{\le\alpha}$，$\lambda,\mu\ge 0$，且 $\lambda+\mu=1$，由 f 的几何凸性可以得到

$$f\left(x^\lambda y^\mu\right)\le f^\lambda(x)f^\mu(y)\le\alpha^\lambda\alpha^\mu=\alpha,$$

即 $x^\lambda y^\mu\in L_{\le\alpha}$，所以 $L_{\le\alpha}$ 是几何凸集。

4 结论

本文进一步探讨了几何凸集和几何凸函数的性质。首先在几何凸集概念的基础上，定义了集合的几何凸包和几何凸组合，给出了一个判定几何凸集的等价条件和一个几何凸组合的例子。然后利用上图给出几何凸函数的等价定义，得到了几何凸函数的一个判定定理。同时，定义函数的几何凸包，利用函数的几何凸包得到了几何凸函数的另一个判定定理。最后，研究了几何凸函数在几种运算下保持几何凸性的不变性质以及几何凸函数的局部全局性质。本文的研究结果在一定程度上完善了几何凸集和几何凸函数的性质，进一步丰富了几何凸性理论。但是几何凸集和几何凸函数在更多运算下的不变性尚未解决，需要在今后的研究工作中进一步探讨。

参考文献

[1] 李世杰. 凸函数Jensen不等式的一个推广及其应用 [J]. 抚州师专学报 (自然科学辑刊), 1988, 3: 30-37.

[2] L. G. Lucht. Mittelwertungleichungen fur losungen gewisser differenzengleichungen [J], Aequationes Mathmaticae, 1990, 39: 204-209.

[3] J. Matkowski and L. L. Paranorms. Selected topics in functional equations and iteration theory [C]//Proceedings of the Austrian-Polish seminar, Graz Math. Ber., 1992, 316: 103-138.

[4] C. P. Niculescu. Convexity according to the geometric mean [J], Mathematical Inequalities and Applications, 2000, 3 (2): 155-167.

[5] C. E. Finol and M. Wǿjtowicz. Multiplicative properties of real functions with applications to classical functions [J], Aequationes Mathmaticae, 2000, 59: 134-149.

[6] 杨露. 关于几何凸函数的不等式 [J]. 河北大学学报(自然科学版), 2002, 22 (4): 325-328.

[7] 吴善和. 几何凸函数与琴生型不等式 [J]. 数学的实践与识, 2002, 32 (2): 155-163.

[8] 张小明. 关于几何凸函数的 Hadamard 型不等式 [J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(9): 171-176.

[9] 张小明. 几何凸函数的几个定理及其应用 [J]. 首都师范大学学报 (自然科学版), 2004, 25 (2): 11-13.

[10] 宋振云. 关于几何凸函数的积分型Jensen不等式 [J]. 湖北职业技术学院学报, 2013, 16 (1): 110-112.

[11] B. Y. Xi, R. F. Bai, F. Qi. Hermite-Hadamard type inequalities for the *m*- and (α,*m*)- geometrically convex functions [J]. Aequationes Mathematicae, 2012, 84 (3): 261-269.

[12] A. O. Akdemir, M. Tunç. On some integral inequalities for *s*-geometrically convex functions and their applications [J]. International Journal of Open Problems in Computer Science and Mathematics, 2012, 6 (1): 1-10.

[13] B. Zhang, B. Y. Xi, F. Qi. Some properties and inequalities for *h*-geometrically convex functions [J]. Journal of classical analysis, 2019, 3 (2): 101-108.

[14] 刘倩, 王淑红. *m*-几何凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式 [J]. 湖北民族大学学报 (自然科学版), 2022, 40 (1): 91-95.

[15] 张小明. 几何凸函数 [M]. 合肥: 安徽大学出版社, 2004.

[16] R. T. Roekafellar. Convex analysis [M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.

作者简介

王淑红

1980 年生, 教授, 博士, 研究方向: 凸性理论的研究.

E-mail: shuhong7682@163.com

刘倩

1997 年生, 硕士研究生, 研究方向: 凸函数, 广义凸函数和不等式的研究.

E-mail: 599558124@qq.com