具有含时系数的反应扩散方程的爆破问题

王美丹，汪颖*

大连交通大学理学院，辽宁大连 116028

摘要：偏微分方程是以建立数学模型的方式分析和解决现实生活中存在的实际问题，反应扩散方程作为偏微分方程的重要部分之一，反应扩散方程爆破时间的研究不仅具有理论意义，而且具有更加实际的物理意义，尤其是在物理、化学、医学、生物科学和传染病学领域中物质的扩散现象分析等.在现实生活中，热原函数不仅与温度有关，还与时间开关函数 $k(t)$有关，本文考虑了具有齐次 Neumann 边界条件和含时系数的散度型反应扩散方程的爆破问题.难点在于找到含时系数 $k(t)$的影响以及内吸收项与边界源之间的关系来确定解的爆破.通过构造合适的能量泛函并定义恰当的辅助函数的方法，由凸性论证方法，并结合微分不等式估计和 Young 等一系列不等式，在 $k(t)$和 $f(u)$适当的假设条件下，计算得到了反应扩散方程的爆破时间.

关键词：反应扩散方程；含时系数；爆破时间

DOI: 10.57237/j.wjms.2023.02.001

Blow up Problem of Reaction Diffusion Equation with Time-dependent Coefficients

Wang Meidan, Wang Ying*

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China

Abstract: Partial differential equations are used to analyze and solve practical problems in real life by establishing mathematical models. As an important part of partial differential equations, reaction diffusion equations not only have theoretical significance, but also have more practical physical significance, especially in the fields of physics, chemistry, medicine, bioscience, and infectious disease. In real life, The pyrogen function is not only related to temperature, but also to the time switching function. This paper considers the blowup problem of a divergence type reaction diffusion equation with homogeneous Neumann boundary conditions and time-dependent coefficients. The difficulty lies in finding the influence of time-dependent coefficients and the relationship between the internal absorption term and the boundary source to determine the blowup of the solution. By constructing appropriate energy functional and defining appropriate auxiliary functions, the method of convexity argumentation is used, And combined with differential inequality estimation and a series of inequalities such as Young, the blow up time of the reaction diffusion equation was calculated under appropriate assumptions.

Keywords: Reaction Diffusion Equation; Time Dependent Coefficient; Burst Time

---

基金项目：辽宁省教育厅高校科研项目资助（编号: LJKMZ20220832).

*通信作者：汪颖, wangyingfc@163.com

收稿日期: 2023-07-06；接受日期: 2023-08-31；在线出版日期: 2023-09-08

1 引言

在过去的几十年中，反应扩散方程解的爆破问题一直是研究的热点，出现了许多的研究成果，主要针对于研究解的整体存在性、爆破时间的上下界及解的定性分析等方面.在物理学、化学、核科学、医学、生物科学和传染病学等相关领域中应用广泛.因此，对于反应扩散方程解的爆破问题的研究具有重要的实际意义[1].

近年来，具有含时系数的反应扩散方程解的爆破问题已取得了大量的研究成果. Payne 和 Philippin [2, 3]考虑了一类具有含时系数的半线性抛物方程的初边值问题.在 Dirichlet 和齐次 Neumann 边界条件下，在 $k(t)$ 和 $f(u)$ 的假设条件下，利用一阶微分不等式技术，得到了爆破时间的上下界，并给出了全局解存在的充分条件.

方钟波等[4]在 Payne 和 Philippin 的影响下，研究了特殊的反应扩散方程在非线性散度形式下解的爆破问题.在 $k(t)$ 和非线性函数 f 和 g 上建立了保证全局解存在的条件，并得到了爆破时间 t^* 在限制条件下的上下界.

Bei Hu [5]研究了具有规定能量的半线性抛物方程，通过构造辅助函数，并基于凸性论证[6]，得到了爆破时间.

Ali Khelghati [7]研究了具有正初始能量的非局部半线性抛物方程的爆破现象.证明了当初始能量为正且初始数据适当大时，方程的经典解在有限时刻内爆破.

Gao W [8]研究了一类具有齐次 Neumann 边界条件的半线性抛物方程，利用抛物估计的标准理论和收缩映射原理，证明了初始能量为正的解的爆破结果.

Zhang J [9]研究了一类具有非齐次 Neumann 边界条件和含时系数的非线性发散型抛物方程，建立了非线性函数 $u(x,t)$ 正解全局存在的新的充分条件，并给出了爆破时间的上下界.

Wang Y 和 Fang B Z [12]研究了具有含时系数的非局部抛物型问题在 Robin 边界条件下的爆破解，主要困难在于找出含时系数 $k(t)$ 的影响，利用了辅助函数法和微分不等式技术，求得了在有限时刻内爆破时间的下界.

本文中初值的积分和解随时间发展的积分保持不变，因此积分是守恒的，即当温度增长非常快时，它的总质量却是守恒的，它反映了更加实际的物理意义，尤其是在核科学、模拟种群动力学和生物科学领域等方面.

本文考虑如下具有齐次 Neumann 边界条件和含时系数的反应扩散方程

$$\begin{cases} u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + k(t)f(u) \\ -k(t)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(u)dx, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,t^*) \\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_j = 0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,t^*) \\ u(x,0)=u_0(x)>0, \quad x\in\Omega \end{cases} \tag{1}$$

本文对 $u(x,t)$ 的非负性不作要求，不再对 $u_0\in C^1(\overline{\Omega})$ 施加限制条件，例如[5]中的 $\int_\Omega u_0(x)dx=1$，[7，8]中的 $\int_\Omega u_0(x)dx=0$.所以可以用 $f(u)$ 代替[5，7，8]中的 $|u|^{p-1}u$.

其中 $\Omega\in R^n (n\geq 1)$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}$ 是散度型耗散项，$(a_{ij}(x))_{n\times n}$ 是一个微分正定矩阵，$v=(v_1,v_2\cdots v_n)$ 是边界上的单位外法向量，含时系数 $k(t)$ 是一个非负微分函数，t^* 表示可能发生爆破的时间，反之则 $t^*=+\infty$.

2 反应扩散方程的爆破分析

引理[1]设一个二阶可微函数 $\theta(t)\geq 0$ 满足不等式

$$\theta''(t)\theta(t)-(1+\sigma)\theta'^2\geq 0, \quad t>0 \tag{2}$$

其中 σ>0 是常数.如果 $\theta(0)>0$ 和 $\theta'(0)>0$ 成立，则存在 $0<t^*\leq\theta(0)/\sigma\theta'(0)$，使得 $\theta(t)$ 在 $t\to t^*$ 时趋于无穷.

定理：含时系数 $k(t)$ 为非负微分函数，f 为非负可积函数，它们满足

$$f(\xi)\xi \geq \gamma F(\xi) \geq 0, \gamma>2,$$
$$F(\xi)=\int_0^{\xi} f(\tau)d\tau$$
$$\lim_{|\xi|\to\infty} F(\xi)/f(\xi)=\infty,$$
$$m \geq k(t) \geq 0, k(t)^{'} \geq 0$$

另外，我们假设$\varphi(0)>0$且足够大.

$$\varphi(t)=:-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_{\Omega}F(u)dx$$

则问题(1)的经典解$u(x,t)$在时间$t^{*}\leq T$爆破.其中$T=\theta(0)/\sigma\theta^{'}(0)$.

证明：此证明基于凸性理论.首先，对问题(1)在Ω上积分，并由边界条件可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}udx &= \int_{\partial\Omega}\sum_{ij}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}v_j dS+k(t)\int_{\Omega}f(u)dx\\ &-\frac{1}{|\Omega|}k(t)\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega}f(u)dx\right)dx\\ &=0\end{aligned}$$

由上式可知

$$\int_{\Omega}udx=\int_{\Omega}u_0dx \tag{3}$$

初值的积分和解随时间发展的积分保持不变，这表明u的积分是守恒的.

然后，对(1)两边同乘u并在Ω上积分得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}uu_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2dx\\ &=\int_{\Omega}u\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+k(t)f(u)-\frac{1}{|\Omega|}k(t)\int_{\Omega}f(u)dx\Big)dx\\ &=-\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_{\Omega}f(u)udx\\ &\quad-\frac{1}{|\Omega|}k(t)\int_{\Omega}f(u)dx\int_{\Omega}udx\\ &=-\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_{\Omega}f(u)udx\\ &\quad-\frac{1}{|\Omega|}k(t)\int_{\Omega}f(u)dx\int_{\Omega}u_0dx\end{aligned} \tag{4}$$

对(1)两边同乘u_t并在Ω上积分得

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}u_t^2dx\\ &=-\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{tx_j}dx\\ &\quad+k(t)\int_{\Omega}f(u)u_tdx-\frac{k(t)}{|\Omega|}\int_{\Omega}f(u)dx\int_{\Omega}u_tdx\\ &=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx\\ &\quad+\frac{d}{dt}\Big[k(t)\int_{\Omega}F(u)dx\Big]-k^{'}(t)\int_{\Omega}F(u)dx\\ &\leq-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_{\Omega}F(u)dx\end{aligned} \tag{5}$$

其中$k^{'}(t)\geq$，由定理中的假设条件知$F(u)=\int_0^u f(\tau)d\tau$

受(5)启发，我们定义辅助函数

$$\varphi(t)=:-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_{\Omega}F(u)dx \tag{6}$$

由(6)知(5)变为

$$\varphi^{'}(t)\geq\int_{\Omega}u_t^2dx\geq 0 \tag{7}$$

现在，对(7)从 0 到t积分得

$$\varphi(t)\geq\varphi(0)+\int_0^t\int_{\Omega}u_t^2dxdt \tag{8}$$

受(8)启发，我们定义恰当的辅助函数$\theta(t)$

$$\theta(t)=\int_0^t\int_{\Omega}u_t^2dxdt+Mt^2+N \tag{9}$$

其中$M\geq c_1>0, N\geq c_2>0$，$c_i(i=1,2)$为正常数.然后，由(9)计算可知

$$\theta^{'}(t)=\int_{\Omega}u^2dx+2Mt \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\theta^{''}(t)&=\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u^2dx+2M\\ &=-2\int_{\Omega}\sum_{ij}^{n}a_{ij}(t)u_{x_i}u_{x_j}dx\\ &\quad+2\int_{\Omega}k(t)f(u)dx\\ &\quad-\frac{2}{|\Omega|}k(t)\int_{\Omega}f(u)dx\int_{\Omega}u_0dx+2M\end{aligned} \tag{11}$$

首先证明 $\exists\lambda\in(4,2\gamma)$，使得

$$\theta''(t)\ge\lambda\varphi(t) \tag{12}$$

即

$$\begin{aligned}&-2\int_\Omega\sum_{ij}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+2\int_\Omega k(t)f(u)udx\\&-\frac{2}{|\Omega|}k(t)\int_\Omega f(u)dx\int_\Omega u_0dx+2M\ge\\&\lambda\left[-\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{ij}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_\Omega F(u)dx\right]\end{aligned}\tag{13}$$

由定理中 f 的假设条件可知 $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}F(\xi)/f(\xi)=\infty$，$\forall\delta>0$，$2\gamma-\delta>4$，$\exists L>0$，$H>0$ 使得 $\forall\xi:|\xi|\ge L$，$\frac{2}{|\Omega|}\left|\int_\Omega u_0dx\right||f(\xi)|\le\delta F(\xi)$，并且 $\forall\xi:|\xi|\le L$，$|f(\xi)|\le H$，其中 H 为常数.

则有

$$\begin{aligned}&\left|-\frac{2}{|\Omega|}k(t)(\int_\Omega u_0dx)(\int_\Omega f(u)dx)\right|\\&\le\frac{2}{|\Omega|}k(t)\left|\int_\Omega u_0dx\right|(\int_{\{x|x\in\Omega,|u|\le L\}\cup\{x|x\in\Omega,|u|\ge L\}}|f(u)|dx)\\&\le\frac{2}{|\Omega|}k(t)\left|\int_\Omega u_0dx\right|\int_{\{x|x\in\Omega,|u|\le L\}}Hdx\\&+\delta k(t)\int_{\{x|x\in\Omega,|u|\ge L\}}F(u)dx\\&\le\delta k(t)\int_\Omega F(u)dx+\frac{2}{|\Omega|}k(t)\left|\int_\Omega u_0dx\right|\int_\Omega Hdx\\&\le\delta k(t)\int_\Omega F(u)dx+C(H,\Omega,u_0,k)\end{aligned}\tag{14}$$

即有

$$\begin{aligned}&-\frac{2}{|\Omega|}k(t)\left(\int_\Omega u_0dx\right)\left(\int_\Omega f(u)dx\right)\\&\ge-\delta k(t)\int_\Omega F(u)dx-C(H,\Omega,u_0,k)\end{aligned}\tag{15}$$

其中 $C(H,\Omega,u_0,k)$ 为常数.

将(15)带入(13)整理，并由定理中 f 的假设条件 $\int_\Omega f(u)udx\ge\gamma\int_\Omega F(u)dx$，其中 $\gamma>2$.

可知

$$\begin{aligned}&-2\int_\Omega\sum_{ij}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+2k(t)\int_\Omega f(u)udx\\&-\delta k(t)\int_\Omega F(u)dx-C+2M\\&\ge-2\int_\Omega\sum_{ij}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+2M-C\\&+(2\gamma-\delta)k(t)\int_\Omega F(u)dx\\&\ge\lambda\left[-\frac{1}{2}\int_\Omega\sum_{ij}^n a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx+k(t)\int_\Omega F(u)dx\right]\end{aligned}\tag{16}$$

其中 $2M-C>0$，且 $\exists\lambda\in(4,2\gamma-\delta)$，因此(12)得证.

为证明引理，我们进行如下计算

$$\begin{aligned}\theta'(t)&=\int_\Omega u^2dx+2Mt\\&=\int_0^t\frac{d}{dt}(\int_\Omega u^2dx)dt+\int_\Omega u_0^2dx+2Mt\\&=2\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt+\int_\Omega u_0^2dx+2Mt\end{aligned}\tag{17}$$

由 Cauchy 和 Young 不等式知

$$\begin{aligned}&\theta'(t)^2\\&=(2\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt+\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\\&=4(\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt)^2+(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\\&+4(\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt)(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)\\&\le4(\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt)^2+(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\\&+4\varepsilon(\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt)^2+\frac{1}{\varepsilon}(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\\&=4(1+\varepsilon)(\int_0^t\int_\Omega uu_tdxdt)^2+(1+\frac{1}{\varepsilon})(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\\&\le4(1+\varepsilon)(\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt)(\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt)\\&+(1+\frac{1}{\varepsilon})(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\end{aligned}\tag{18}$$

将(16)、(17)和(18)带入(2)，得

$$\begin{aligned}&\theta''(t)\theta(t)-(1+\sigma)\theta'^2\\&\ge\lambda(\varphi(0)+\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt)(\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+Mt^2+N)\\&-4(1+\varepsilon)(1+\sigma)(\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt)(\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt)\\&-(1+\frac{1}{\varepsilon})(1+\sigma)(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2\end{aligned}$$

$$=[\lambda-4(1+\varepsilon)(1+\sigma)](\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt)(\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt)$$
$$+\lambda\varphi(0)(\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt+Mt^2+N)$$
$$+\lambda\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt(Mt^2+N)$$
$$-(1+\frac{1}{\varepsilon})(1+\sigma)(\int_\Omega u_0^2dx+2Mt)^2$$

首先固定 $\varepsilon>0$，$\sigma>0$ 且足够小使得

$$\lambda\geq 4(1+\varepsilon)(1+\sigma) \tag{19}$$

确定 $\varphi(0)$ 并固定 u_0，使得

$$\lambda\varphi(0)\geq 4(1+\sigma)(1+\frac{1}{\varepsilon})M \tag{20}$$

由(19)和(20)可知，引理(2)成立，则有

$$\theta^{''}(t)\theta(t)-(1+\sigma)\theta^{'2}\geq 0$$

则有

$$\theta^{''}(t)\theta(t)-(1+\alpha)\theta^{'2}\geq\theta^{2+\sigma}(\theta^{'}(t)\theta^{-(1+\sigma)})^{'}\geq 0$$

由 $(\theta^{'}(t)\theta^{-(1+\sigma)})^{'}\geq 0$ 知

$$\Rightarrow\theta^{'}(t)\theta^{-(1+\sigma)}(t)\geq\theta^{'}(0)\theta^{-(1+\sigma)}(0)$$
$$\Rightarrow-\frac{1}{\sigma}(\theta^{-\sigma}(t))^{'}\geq\theta^{'}(0)\theta^{-(1+\sigma)}(0)$$
$$\Rightarrow(\theta^{-\sigma}(t))^{'}\leq-\sigma\theta^{'}(0)\theta^{-(1+\sigma)}(0)$$
$$\Rightarrow\theta^{-\sigma}(t)\leq\theta^{-\sigma}(0)[1-\sigma\theta^{'}(0)\theta^{-1}(0)t]$$
$$\Rightarrow\theta(t)\geq\frac{\theta(0)}{[1-\sigma\theta^{'}(0)\theta^{-1}(0)t]^{\frac{1}{\sigma}}}$$

从而

$$\lim_{t\to t^*}\theta(t)=\infty \tag{21}$$

可知 $t^*=\theta(0)/\sigma\theta^{'}(0)$.

则问题(1)的解能够在有限时间内发生爆破.

注 1：由 $\theta(t)$ 的定义，可知 $\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxdt$ 可在有限时间 t^* 内发生爆破.

注 2：存在许多函数能够满足定理中 f 的假设条件，例如：$f(\xi)=|\xi|^{p-1}\xi, p>1$.

3 结论

本文主要研究了具有含时系数的散度型反应扩散方程的爆破问题，通过构造合适的辅助函数，结合不等式估计的方法，得到了反应扩散方程解的爆破时间. 本文的难点主要是将热原函数推广为一般的抽象函数，并给出了该抽象函数需要满足的一些假设条件，其次是对于确定含时系数和边界之间的关系对确定解爆破的影响.

参考文献

[1] 沈旭辉. 具有梯度源和非局部源的反应扩散方程解的爆破时刻下界 [J]. 应用数学和力学, 2022, 43 (04): 469-476.

[2] Payne E L, Philippin A G. Blow-up phenomena in parabolic problems with time dependent coefficients under Dirichlet boundary conditions [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2013, 141 (7).

[3] Payne E L, Philippin A G. Blow-up phenomena in parabolic problems with time-dependent coefficients under Neumann boundary conditions [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2012, 142 (3).

[4] Fang B Z, Wang Y. Blow-up analysis for a semilinear parabolic equation with time-dependent coefficients under nonlinear boundary flux [J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2015, 66 (5).

[5] Hu B, Yin H. Semilinear parabolic equations with prescribed energy [J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1995, 44 (3).

[6] Levine A H, Payne E L. Nonexistence theorems for the heat equation with nonlinear boundary conditions and for the porous medium equation backward in time [J]. Journal of Differential Equations, 1974, 16 (2): 319-334.

[7] Ali Khelghati, Khadijeh Baghaei. Blow-up phenomena for a nonlocal semilinear parabolic equation with positive initial energy [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2015, 70 (5): 896-902.

[8] Gao W, Han Y. Blow-up of a nonlocal semilinear parabolic equation with positive initial energy [J]. Applied Mathematics Letters, 2011, 24 (5): 784-788.

[9] Zhang J, Li F. Global existence and blow-up phenomena for divergence form parabolic equation with time-dependent coefficient in multidimensional space [J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2019, 70 (5): 150.

[10] 郑帅. 几类反应扩散方程的爆破问题 [D]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2021: 27-32.

[11] Ahmed L, Mu C, Zheng P, et al. Blow-up and global existence for the non-local reaction diffusion problem with time dependent coefficient [J]. Boundary Value Problems, 2013, 2013 (1): 1-6.

[12] Wang Y, Fang B Z, Yi S. Lower bounds for blow-up time in nonlocal parabolic problem under Robin boundary conditions [J]. Applicable Analysis, 2019, 98 (5a8).

[13] Philippin, A G. Blow-up phenomena for a class of fourth-order parabolic problems [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2015, 143 (6): 2507-2013.

[14] Payne L, Philippin G. Blow-up in a class of non-linear parabolic problems with time-dependent coefficients under Robin type boundary conditions [J]. Applicable Analysis: An International Journal, 2012, 91 (12): 2245-2256.

[15] 余巧云, 孟海霞. 时间加权非局部反应扩散方程解的性质 [J]. 佳木斯大学学报 (自然科学版), 2021, 39 (01): 145-148.