Vol. 3, No. 1 | World Journal of Mathematics and Statistics | June, 2024
第 3 卷第 1 期 | 数学与统计 | 2024 年 6 月

轮换反对称性及其应用

杨春玲，张传芳*

广东石油化工学院理学院，广东茂名 525000

摘要： 介绍区域和曲线轮换反对称性的定义，并且给出三个分别针对平面曲线或者平面区域、空间曲线或者空间区域的轮换反对称性的判别方法。列举当积分区域或积分曲线具有轮换反对称性时积分的相应的性质，其中包括二重积分和三重积分的轮换反对称性、第一类曲线积分的轮换反对称性、第二类曲线积分的轮换反对称性、第一类曲面积分的轮换反对称性、第二类曲面积分的轮换反对称性等。给出了当积分曲线为平面曲线时的第二类曲线积分的轮换反对称性的证明，其余结论的证明均类似，文中均指出了证明的基本思路和方法。最后，通过四个例题分别展示了二重积分轮换反对称性、三重积分轮换反对称性、第一类曲线积分轮换反对称性和第二类曲线积分轮换反对称性的应用。

关键词： 重积分；曲线积分；曲面积分；轮换反对称性

DOI: 10.57237/j.wjms.2024.01.001

The Rotation Antisymmetry and Its Application

Yang Chunling, Zhang Chuanfang*

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China

Abstract: This paper provides an introduction to the definition of rotation antisymmetry for regions and curves, and presents three methods for determining the rotation antisymmetry for plane curves or regions, space curves or regions, respectively. It enumerates the corresponding properties of integrals when the integration region or curve has rotation antisymmetry, including rotation antisymmetry of the double integrals and triple integrals, rotation antisymmetry of the first type curve integrals, rotation antisymmetry of the second type curve integrals, rotation antisymmetry of the first type surface integrals, rotation antisymmetry of the second type surface integrals, etc. A proof of the rotation antisymmetry of the second type of curve integral is provided when the integral curve is a plane curve. The proofs of other conclusions are similar, and the ideas and methods of proofs are outlined in the article. Finally, four examples were used to demonstrate the applications of the double integral rotation antisymmetry, the triple integral rotation antisymmetry, the first type curve integral rotation antisymmetry, and the second type curve integral rotation antisymmetry.

Keywords: Multiple Integral; Curve Integral; Surface Integral; Rotation Antisymmetry

基金项目：广东石油化工学院自然科学研究项目（2019rc101).

*通信作者：张传芳，chuanfangzhang@gdupt.edu.cn

收稿日期: 2024-04-30；接受日期: 2024-06-11；在线出版日期: 2024-06-18

1 引言

多元函数积分的被积表达式与积分区域往往比较复杂，利用一般方法常常使运算繁琐，恰当地利用轮换对称性，常常事半功倍[1]。李远东给出了区域或者曲线轮换对称性的定义，证明了关于积分轮换对称性的一些结论，并给出了利用这些结论化简积分计算的若干实例[2]；陈云新讨论了利用轮换对称性简化重积分、曲线积分和曲面积分的方法[3]；张云艳给出了 n 元函数及 n 维区域轮换对称性的定义，介绍了轮换对称性在计算立体的体积、重积分及曲线、曲面积分中的应用实例[4]；马军英给出了积分域关于变量轮换对称的定义，讨论了有关几类积分的计算公式及应用实例[5]；王建刚介绍了区域的轮换对称性和函数的轮换对称性，并介绍了在微分、重积分、线、面积分中的应用[6]；曹荣荣举例说明了轮换对称性在证明定积分不等式及简化计算方面的应用[7]；秦勇给出了轮换对称性的一些结论，并列举应用实例[8]；乐励华等从重积分定义出发，对轮换对称性的相关结论给出了证明[9]；肖莉介绍了轮换对称性的定义以及应用条件，列举了利用轮换对称性简化多元函数微分与重积分的计算[10]；曹斌等举例说明了奇偶对称性和轮换对称性在多元函数重积分、曲线积分和曲面积分中的应用[11]；谢加芳等讨论了曲面积分中的奇偶对称性和轮换对称性问题，并通过具体例子说明了对称性在曲面积分计算中的作用[12]；李源等讨论了多元数量值函数积分中轮换对称性的一般原理，明确了轮换对称性成立的条件，并据此给出了二重积分、三重积分、对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分的轮换对称性定理，给出了在计算这些积分中利用轮换对称性简化问题的若干实例[13]；冯佳宾介绍了如何判断积分区域具有轮换对称性，以及如何利用轮换对称性来简化一些定积分的计算，并给出实例说明在运用轮换对称性时应该注意的一些问题[14]；郑芳讨论了轮换对称性及其特殊属性在计算多元函数积分中的应用[15]；尤品龙等中针对全国大学生数学竞赛题，利用积分的轮换对称性，给出了一种巧妙解法[16]。以上这些均讨论了轮换对称性及其应用，但鲜有学者讨论轮换反对称性及其应用。本文旨在给出二维或者三维空间中区域或曲线轮换反对称性的定义和判别方法，并讨论由此得到的积分的轮换反对称性的一些性质和应用。

引理（第二类平面曲线积分换元法）[17, 18]设 L 为平面有向光滑曲线，起点为 A，终点为 B，$P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 L 上连续。变换 $T: x=x(u,v), y=y(u,v)$ 将 uOv 平面上的有向曲线 L' 和点 A',B' 一对一地映为 xOy 平面上的 L 和点 A，B，且 L' 的起点为 A'，终点为 B'。函数 $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ 在 L' 上具有一阶连续偏导数，雅可比行列式 $J(u,v)=\left.\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{L'}\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{L'}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv,$$

其中等式右端

$$P=P(x(u,v),y(u,v)),Q=Q(x(u,v),y(u,v)).$$

2 主要结论

定义 1 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$ 为平面区域，若对于任给的 $(x,y)\in D$ 都有 $(-y,-x)\in D$，则称区域 D 关于变量 x,y 具有轮换反对称性。

定义 2 设 L 为平面曲线，若对于任给的 $(x,y)\in L$ 都有 $(-y,-x)\in L$，则称曲线 L 关于变量 x,y 具有轮换反对称性。

定义 3 设 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ 为空间区域，如果任给 $(x,y,z)\in\Omega$，都有

$$(-y,-z,-x)\in\Omega，\ (-z,-x,-y)\in\Omega，$$

则称区域 Ω 关于变量 x,y,z 具有轮换反对称性。

定义 4 设 Γ 为空间曲线，如果任给 $(x,y,z)\in\Gamma$，都有

$$(-y,-z,-x)\in\Gamma,(-z,-x,-y)\in\Gamma，$$

则称曲线 Γ 关于变量 x,y,z 具有轮换反对称性。

定义是判断区域或者曲线是否具有轮换反对称性的方法，但很多时候定义使用起来并不是很方便，下面给出几种实用的判别方法。

判别法 1 平面区域 D（或平面曲线 L）具有轮换反对称性的充分必要条件是区域 D（或曲线 L）关于直线

$y=-x$ 对称。

判别法 2 平面区域 D（或平面曲线 L）具有轮换反对称性的充分必要条件是围成区域 D 的边界的曲线方程 $F(x,y)=0$（或曲线 L 的方程 $G(x,y)=0$）中将换 x,y 换成 $-y,-x$ 后方程不变，即 $F(x,y)=F(-y,-x)$（或 $G(x,y)=G(-y,-x)$）。

判别法 3 空间区域 Ω（或空间曲线 Γ）具有轮换反对称性的充分必要条件是围成区域 Ω 的边界的曲面方程 $F(x,y,z)=0$（或曲线 Γ 的一般方程 $\begin{cases}G(x,y,z)=0\\H(x,y,z)=0\end{cases}$）中将 x,y,z 换成 $-y,-z,-x$ 或者换为 $-z,-x,-y$ 方程不变，即 $F(x,y,z)=F(-y,-z,-x)=F(-z,-x,-y)$（或 $\begin{cases}G(x,y,z)=0\\H(x,y,z)=0\end{cases}$，$\begin{cases}G(-z,-x,-y)=0\\H(-z,-x,-y)=0\end{cases}$，$\begin{cases}G(-y,-z,-x)=0\\H(-y,-z,-x)=0\end{cases}$ 均表示同一条曲线 Γ）。

注 (i) 以上三个判别法的证明比较容易，在此省略证明过程。

(ii) 区域或者曲线轮换反对称性主要用来讨论多元函数的各种积分的性质，这些性质才是化简积分计算时常用的，称其为积分的轮换反对称性，常常不加区分地简称为轮换反对称性。

定理 1（二重积分轮换反对称性）设 D 为平面有界闭区域，且关于 x,y 具有轮换反对称性，$f(x,y)$ 在 D 上连续，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(-y,-x)dxdy.$$

定理 2（三重积分轮换反对称性）设 Ω 为空间有界闭区域，且关于 x,y,z 具有轮换反对称性，$f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=-\iiint_\Omega f(-z,-x,-y)dxdydz=-\iiint_\Omega f(-y,-z,-x)dxdydz.$$

定理 3（第一类曲线积分轮换反对称性——平面曲线）设 L 为 xoy 平面上的一条光滑或分段光滑曲线，L 关于 x,y 具有轮换反对称性，$f(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(-y,-x)ds.$$

定理 4（第一类曲线积分轮换反对称性——空间曲线）设 Γ 为空间的一条光滑或分段光滑曲线，Γ 关于 x,y,z 具有轮换反对称性，$f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\Gamma f(-y,-z,-x)ds=\int_\Gamma f(-z,-x,-y)ds.$$

定理 5（第一类曲面积分轮换反对称性）设 S 为空间光滑或分片光滑曲面，且关于 x,y,z 具有轮换反对称性，$f(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_S f(-z,-x,-y)dS=\iint_S f(-y,-z,-x)dS.$$

定理 6（第二类曲线积分轮换反对称性——平面曲线）设 L 为 xoy 平面上的一条光滑或分段光滑曲线，L 关于 x,y 具有轮换反对称性，$P(x,y),Q(x,y)$ 在 L 上连续，则

$$\int_L P(x,y)dx=-\int_L P(-y,-x)dy\text{；}$$
$$\int_L Q(x,y)dy=-\int_L Q(-y,-x)dx$$

或者写成

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int_L P(-y,-x)dy+Q(-y,-x)dx$$

证 设积分曲线方程 $L:\varphi(x,y)=0$，由题意知 L 具有轮换反对称性，故

$$\varphi(-y,-x)=\varphi(x,y)=0.$$

再令变换 $T:x=-y,y=-x$，则 T 将曲线 $L':\varphi(-y,-x)=0$ 一对一地映为曲线 L，由于 L' 与 L 关于直线 $y=-x$ 对称，故即 L' 就是 L^{-}。又因为 T 具有一阶连续偏导数，且雅可比行列式

$$J=\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故由引理得

$$\begin{aligned}&\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\\&=\int_{L'}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}+Q\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(P\frac{\partial x}{\partial v}+Q\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\\&=\int_{L^-}P(-y,-x)(-1)d(-y)+Q(-y,-x)(-1)d(-x)\\&=-\int_L P(-y,-x)dy+Q(-y,-x)dx.\end{aligned}$$

定理 7（第二类曲线积分轮换反对称性——空间曲线）设 Γ 为空间光滑或分段光滑曲线，Γ 关于 x,y,z 具有轮换反对称性，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 Γ 上连续，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx=\int_\Gamma P(-y,-z,-x)dy=\int_\Gamma P(-z,-x,-y)dz;$$

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dy=\int_\Gamma Q(-y,-z,-x)dz=\int_\Gamma Q(-z,-x,-y)dx;$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dz=\int_\Gamma R(-y,-z,-x)dx=\int_\Gamma R(-z,-x,-y)dy$$

或者写成

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\&=\int_\Gamma P(-y,-z,-x)dy+Q(-y,-z,-x)dz+R(-y,-z,-x)dx\\&=\int_\Gamma P(-z,-x,-y)dz+Q(-z,-x,-y)dx+R(-z,-x,-y)dy.\end{aligned}$$

定理 8（第二类曲面积分轮换反对称性）设 S 为空间光滑或分片光滑曲面，且关于 x,y,z 具有轮换反对称性，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在 S 上连续，则

$$\iint_S P(x,y,z)dydz=\iint_S P(-z,-x,-y)dxdy=\iint_S P(-y,-z,-x)dzdx;$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dzdx=\iint_S Q(-z,-x,-y)dydz=\iint_S Q(-y,-z,-x)dxdy;$$

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy=\iint_S R(-z,-x,-y)dzdx=\iint_S R(-y,-z,-x)dydz.$$

或者写成

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy\\&=\iint_S P(-z,-x,-y)dxdy+Q(-z,-x,-y)dydz+R(-z,-x,-y)dzdx\\&=\iint_S P(-y,-z,-x)dzdx+Q(-y,-z,-x)dxdy+R(-y,-z,-x)dydz.\end{aligned}$$

注 上述八个定理中仅给出了定理 6 的证明，其余定理的证明过程均类似。在此仅简单说明：定理 1 可借助二重积分换元法[19, 20]给出证明；定理 2 可借助三重积分换元法[19, 20]给出证明；定理 3 可借助对弧长的平面曲线积分换元法[17]给出证明；定理 4 可借助对弧长的空间曲线积分换元法[17]给出证明；定理 5 可借助对面积的曲面积分换元法[21]给出证明；定理 7 可借助于对坐标的空间曲线积分换元法[17]给出证明；定理 8 可借助对坐标的曲面积分换元法[21]给出证明。

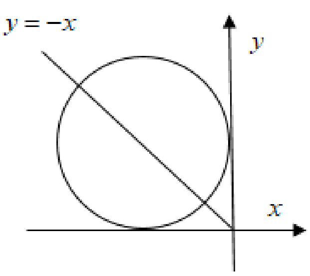

图 1 平面区域 D

3 应用举例

例 1 设 D 是 xoy 平面上以(-1,1)为圆心，以 1 为半径的圆形区域，求 $\iint_D(x^3+y^3)dxdy$.

解 积分区域如图 1 所示，显然 D 关于直线 $y=-x$ 对称，故由判别法 1 知 D 具有轮换反对称性。再由定理 1 得，

$$\iint_D(x^3+y^3)dxdy=\iint_D(-y^3-x^3)dxdy=-\iint_D(x^3+y^3)dxdy$$

故

$$\iint_D(x^3+y^3)dxdy=0$$

例 2 设 Ω 由单位球 $x^2+y^2+z^2\le 1$ 位于第一卦限内的部分和位于第七卦限内的部分组成，求积分 $\iiint_\Omega(x+y+z)^2dxdydz$ 的值。

解 由判别法 3 易知 Ω 具有轮换反对称性，又

$$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dxdydz=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz+2\iiint_\Omega(xy+yz+xz)dxdydz$$

再由定理 2 得

$$\iiint_\Omega(xy+yz+xz)dxdydz=-\iiint_\Omega(xy+yz+xz)dxdydz\Rightarrow\iiint_\Omega(xy+yz+xz)dxdydz=0$$

故

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega (x+y+z)^2 dxdydz &= \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dxdydz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi dr + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 \sin\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{5}.\end{aligned}$$

例 3 设平面曲线 L 表示圆周 $x^2+y^2=1$ 位于第二象限内的部分，计算 $\int_\Gamma x^2 ds.$

解 曲线 L 显然关于直线 $y=-x$ 对称，由判别法 1 知 L 具有轮换反对称性，再由定理 3 得

$$\int_\Gamma x^2 ds = \int_\Gamma y^2 ds = \frac{1}{2}\int_\Gamma (x^2+y^2)ds = \frac{\pi}{4}.$$

例 4 设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x+y+z=0, \end{cases}$$

(1) 计算积分 $\int_\Gamma x^2 yzds$

(2) 当由 z 轴正向看时，取逆时针方向，求 $\int_\Gamma y^2 zdx + z^2 xdy + x^2 ydz.$

解(1)由判别法 3 易知 Γ 具有轮换反对称性，故由定理 4 得

$$\int_\Gamma x^2 yzds = \int_\Gamma y^2 zxds = \int_\Gamma z^2 xyds = \frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2yz + y^2zx + z^2xy)ds = \frac{1}{3}\int_\Gamma xyz(x+y+z)ds = 0$$

(2) 因 Γ 具有轮换反对称性，由定理 7 得

$$\int_\Gamma y^2zdx + z^2xdy + x^2ydz = -\int_\Gamma z^2xdy + x^2ydz + y^2zdx = -\int_\Gamma x^2ydz + y^2zdx + z^2xdy.$$

故

$$\int_\Gamma y^2zdx + z^2xdy + x^2ydz = 0.$$

4 结束语

本文定义了区域或者曲线的轮换反对称性，给出了三种判别区域或者曲线具有轮换反对称性的方法。并在此基础上给出了当积分区域或积分曲线具有轮换反对称性时，重积分、曲线积分、曲面积分所具有的性质，亦即积分的轮换反对称性。通过上面的四个例题的计算过程演示表明：轮换反对称性和轮换对称性一样都能够化简重积分、曲线积分、曲面积分的计算过程，因此，本文的轮换反对称性丰富了多元函数各类积分的计算的方法，进一步完善了经典数学分析中有关积分的理论。

参考文献

[1] 谢兴武．利用轮换对称性简化积分计算 [J]．工科数学, 1991(04) 84-86.

[2] 李远东．坐标的轮换对称性在积分计算中的应用 [J]．渝州大学学报 (自然科学版), 1992(04): 67-75.

[3] 陈云新．轮换对称性在积分中的应用 [J]．高等数学研究, 2001, (01): 28-30.

[4] 张云艳．轮换对称性在积分计算中的应用 [J]．毕节师范高等专科学校学报 (综合版), 2002, (03): 90-92.

[5] 马军英．用积分域变量轮换对称性计算几类积分 [J]．山东师大学报 (自然科学版), 2004, (01): 79-81.

[6] 王建刚．轮换对称性在解题中的应用 [J]．高等数学研究, 2005, (02): 12-13.

[7] 曹荣荣．重积分中轮换对称性的应用 [J]．高等数学研究, 2006, (02): 23-24.

[8] 秦勇．再谈轮换对称性 [J]．高等数学研究，2007, (02): 20-22.

[9] 乐励华，虞先玉．关于轮换对称性的一个注记 [J]．高等数学研究, 2009, 12(02): 31-32.

[10] 肖莉．轮换对称性在微分与重积分计算中的应用 [J]．数学理论与应用, 2010, 30(04): 107-109.

[11] 曹斌，孙艳. 对称性在积分计算中的应用 [J]. 吉林师范大学学报（自然科学版), 2012, 33(03): 125-128.

[12] 解加芳，邹杰涛，李冱岩等. 对称性及其在曲面积分计算中的应用 [J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(14): 295-298.

[13] 李源，郝小枝. 多元数量值函数积分中的轮换对称性 [J]. 云南大学学报（自然科学版), 2013, 35(S2): 433-437.

[14] 冯佳宾. 利用轮换对称性计算多元函数积分 [J]. 高等数学研究, 2015, 18(02): 51-52.

[15] 郑芳. 轮换对称性在多元函数积分计算中的应用 [J]. 高等数学研究, 2022, 25(02): 22-24.

[16] 尤品龙，林鸿钊. 利用积分的轮换对称性巧解数学竞赛题 [J]. 高等数学研究, 2023, 26(02): 18+57.

[17] 宁荣健，彭凯军. 曲线积分的换元法 [J]. 大学数学，2016, 32(04): 62-67.

[18] 詹华税. 关于曲线和曲面积分的换元法 [J]. 厦门理工学院学报, 2020, 28(05): 89-92.

[19] 华东师范大学数学系. 数学分析：下册 [M]. 第四版. 北京：高等教育出版社. 2010, 247; 260.

[20] 刘名生，冯伟贞，韩彦昌. 数学分析 (三) [M]. 第二版. 北京：科学出版社. 2019.12, 164; 179.

[21] 宁荣健，周江涛. 曲面积分的换元法 [J]. 大学数学，2017, 33(02): 73-78.

作者简介

杨春玲

1976 年生，硕士，副教授. 研究方向为从事大学数学课程的教学与研究.

E-mail: kyyangchunling@126.com

张传芳

1978 年生，博士，讲师. 研究方向为非线性分析的研究.

E-mail: chuanfangzhang@gdupt.edu.cn