

粘弹性波传播方程的半离散弱有限元方法



肖继红*

四川大学锦江学院数学教学部, 四川彭山 620860

摘要: 本文主要基于 Maxwell 模型的准静态粘弹性方程, 针对 Maxwell 模型的粘弹性波传播方程, 提出了一类任意阶的弱有限元方法。先在模型问题中引入速度变量, 建立了速度-应力模型的弱变分形式; 再采用弱有限元方法对空间变量进行离散, 得到速度-应力模型的半离散格式。在弱有限元方法的离散中, 利用分片 k 次 ($k \geq 1$) 和 $k+1$ 次分别逼近单元内部的应力和速度, 为了逼近速度在单元边界上的迹, 采用了分片 k 次多项式逼近。本文利用 Gronwall 不等式证明了半离散格式的解的稳定性; 通过对方法进行分析, 最后证明该方法关于空间网格尺度的最优性的误差估计。本文的研究结果表明, 通过引入速度变量和采用弱有限元方法, 可以有效求解 Maxwell 模型的粘弹性波传播方程。

关键词: 粘弹性波传播; 弱有限元方法; 误差估计

DOI: [10.57237/j.wjms.2024.02.002](https://doi.org/10.57237/j.wjms.2024.02.002)

Semi-discrete Weak Galerkin Finite Element Method of Viscoelastic Wave Propagation

Xiao Jihong*

Department of Mathematics of Jinjiang College, Sichuan University, Pengshan 620860, China

Abstract: This paper primarily proposes a weak Galerkin finite element of arbitrary order for the wave propagation equation of the Maxwell viscoelasticity model. The quasi-static viscoelastic equations of the Maxwell model serve as the foundation for this approach. By introducing the velocity variable in the model problem, the weak variational form of the velocity-stress model is established. The spatial variables are then discretized using the weak Galerkin finite element method, resulting in a semi-discrete format for the velocity-stress model. In the discretization process of the weak Galerkin finite element method, piecewise polynomials of degree k ($k \geq 1$) and $k+1$ are used to approximate the stress and velocity within each element, and piecewise polynomials of degree k are employed to approximate the trace of the velocity on the element boundaries. By analyzing and proving the method, this paper demonstrates the stability of the semi-discrete format's solution using Gronwall's inequality, and finally establishes the optimal error estimation with respect to the spatial mesh size for this method. The research findings of this paper indicate that by introducing the velocity variable and utilizing the weak Galerkin finite element method, the wave propagation equation of the viscoelasticity based on the Maxwell model can be effectively solved.

Keywords: Viscoelastic Wave Propagation; Weak Galerkin Finite Element; Error Estimate

*通信作者: 肖继红, xiaojh2752@163.com

1 引言

本文考虑如下的 Maxwell 模型粘弹性波传播方程:

$$\rho u_{tt} - \nabla \cdot \sigma = f, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (1)$$

$$\sigma + \sigma_t = C \varepsilon(u_t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \sigma(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega \quad (3)$$

$$u = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T] \quad (4)$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) 为有界凸多边形区域, 其边界记为 $\partial\Omega$, $t \in [0, T]$ 表示时间, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1}^d$ 对称应力, $u \in \mathbb{R}^d$ 位移场, $\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ 应变, f 是源项, $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi(x)$ 初始条件, $\rho = \rho(x)$ 是材料的质量密度, $C = C(x)$ 是弹性模量满足

$$0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1 < \infty, a.e., x \in \Omega, \quad (5)$$

$$0 < M_0 \tau : \tau \leq C^{-1} \tau : \tau \leq M_1 \tau : \tau, \forall \tau \in \mathbb{R}^{d \times d} \quad (6)$$

这里 ρ_0, ρ_1, M_0, M_1 是四个正常数, 对于 $\kappa, \tau \in \mathbb{R}^{d \times d}$, 定义 $\kappa : \tau = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \kappa_{ij} \tau_{ij}$ 。对于各向同性弹性介质, $C \varepsilon(u_t) = 2\mu \varepsilon(u_t) + \lambda \nabla \cdot u_t I$, μ, λ 是 Lamé 常数, I 是恒等矩阵。

粘弹性方程有着深刻的物理背景, 在材料科学和连续介质力学中有着重要的应用。粘弹性方程的经典模型之一——Maxwell 模型, 主要由本构方程(2)所描述。粘弹性模型还包括 Kelvin-Voigt 模型和 Zener 模型, 主要由服从胡克定律的纯弹性的弹簧和遵从牛顿第二定律的纯粘性阻尼器的不同组合表示, Maxwell 模型由弹簧和阻尼器串联连接组成。与之相关的工作和应用可参考文献[1-5]。

目前, 关于粘弹性方程的研究是一个热点问题。然而, 实际问题中的粘弹性方程本身比较复杂, 计算区域不规则, 直接求解解析非常困难, 行之有效的方法就是求数值解, 关于粘弹性方程的数值解法有许多研究成果。Carcione [6, 7]给出了第一个关于粘弹性材料波传播的数值模拟, 成功引入了记忆变量避免了在本构方程中的卷积积分的计算。Janovsky [8]对可压缩固体应用连续和间断有限元离散线性粘弹性模型进行了研究。Ha [9]应用非协调有限元对粘弹性复合材料在空间区域进行了求解。Rognes [10]对准静态 Maxwell 和 Kelvin-Voigt 模

型分别考虑对称应力混合有限元逼近, 时间离散采用的二阶向后差分格式。Lee [11]应用混合有限元对 Zener、Kevin-Voigt 和 Maxwell 模型分别进行了研究, 对时间离散采用 Crank-Nicolson 格式。王[12]利用杂交应力法分析了 Maxwell 模型, 利用二阶隐式差分进行全离散格式。Yuan [13]利用混合有限元框架对基于 Maxwell 模型的线性粘弹性波传播的问题进行了讨论。

本文基于一类弱有限元(Weak Galerkin, 简称 WG)用于 Maxwell 模型准静态粘弹性方程[14]的分析, 继续讨论在 Maxwell 模型粘弹性波传播方程上的应用。弱有限元最早是由王军平和叶秀[15, 16]在 2011 年提出, 用于解决二阶椭圆问题。该方法的主要思想是采用弱定义的梯度算子或散度算子来代替传统的梯度算子和散度算子。与传统意义的 Galerkin 有限元方法相比, 首先该方法的网格剖分更为灵活, 可以采用任意多边形或多面体剖分; 其次逼近函数空间可以采用间断的有限元函数空间, 从而放松了边界的连续性。在过去的十多年时间里, WG 方法受到许多学者的关注与研究, 取得了大量的研究成果, 如: 对流扩散方程[17, 18], 线性弹性问题[19, 20], Stokes 方程[21]等, 还可以参见关于弱有限元方法的综述文献[22, 23]。关于弱有限元在粘弹性方程的应用, 可参见[24], 主要讨论的是 Kelvin-Voigt 模型的标量形式。本文的主要工作针对 Maxwell 模型粘弹性波传播方程提出的弱有限元, 建立此格式的半离散格式, 证明该格式具有唯一的稳定解和最优误差估计。

2 弱变分形式

首先引入一些记号, 对于任意非负整数 m , 定义 m 阶索伯列夫空间 $H^m(\Omega)$ 和 $H_0^m(\Omega)$, 与之相关的范数 $\|\cdot\|_m$ 和半范 $|\cdot|_m$ 。对于任意向量值(或张量值)函数空间 X , 我们置

$$L^p([0, T]; X) := \{v; [0, T] \rightarrow X; \|v\|_{L^p(X)} < \infty\} \quad (7)$$

和

$$\|v\|_{L^p(X)} := \begin{cases} (\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_X, & p = \infty, \end{cases} \quad (8)$$

注意这里 $v(t)$ 代表 $v(x, t)$ 。为了简化, 我们置 $L^p(X) = L^p([0, T]; X)$, 类似地, 可定义 $C^p(X) = C^p([0, T]; X)$ 。

引入速度变量 $v = u_t$, 粘弹性波传播方程改写为如下的速度-应力形式

$$\rho v_t - \nabla \cdot \sigma = f \quad (9)$$

$$\sigma + \sigma_t = C\varepsilon(v) \quad (10)$$

$$v = 0 \quad (11)$$

$$v(x, 0) = \varphi_1(x), \sigma(x, 0) = \psi(x) \quad (12)$$

很容易得出, $u(x, t) = \varphi_0(x) + \int_0^t v(x, s) ds$ 。

在方程(9)和(10)中, 分别令 $t = 0$, 可得

$$\sigma_t(0) = \gamma(x), v_t(0) = p(x), \quad (13)$$

其中

$$\gamma(x) = C\varepsilon(\varphi_1) - \psi, p(x) = \frac{1}{\rho} (f(0) + \nabla \cdot \psi).$$

定义

$$L^2_S(\Omega) := \{\tau = (\tau_{ij})^{d \times d} \in [L^2(\Omega)]^{d \times d} : \tau_{ij} = \tau_{ji}, i, j = 1, \dots, d\}.$$

利用分部积分公式可得, 系统(9)-(12)的变分形式如下: 求解 $(\sigma, v) \in C^1(L^2_S(\Omega)) \times C^1([H_0^1(\Omega)]^d)$, 使得

$$a(\sigma_t, \tau) + a(\sigma, \tau) - b(v, \tau) = 0, \forall \tau \in L^2_S(\Omega) \quad (14)$$

$$c(v_t, w) + b(w, \sigma) = (f, w), \forall w \in [H_0^1(\Omega)]^d \quad (15)$$

$$\sigma(0) = \psi(x), v(0) = \varphi_1(x), x \in \Omega \quad (16)$$

其中

$$a(\sigma, \tau) = \int_{\Omega} C^{-1} \sigma : \tau, \quad b(v, \tau) = \int_{\Omega} \varepsilon(v) : \tau,$$

$$c(v, w) = \int_{\Omega} \rho v \cdot w.$$

3 弱有限元方法

设 $T_h = \{K\}$ 为任意多边形或多面体区域 Ω 的有限元剖分, 且满足[16]所述的形状正则性条件。记 E_h 为所有单元的边或面的集合。对任意单元 $K \in T_h$ 和 $e \in E_h$, 定义 h_K 和 h_e 分别为单元 K 和边 e 的直径, 置

$$h := \max_{K \in T_h} h_K.$$

定义 $V(K) = \{v = \{v_0, v_b\} : v_0 \in L^2(K), v_b \in H^{1/2}(\partial K)\}$ 。

下面引入离散弱梯度的定义。

定义 1 对任意 $K \in T_h$, $v \in V(K)$ 和整数 $j \geq 0$, v 的离散弱梯度 $\nabla_{w,j,K} v \in [P_j(K)]^d$ 定义为

$$(\nabla_{w,j,K} v, q)_K = -(v_0, \nabla \cdot q)_K + \langle v_b, q \cdot n_K \rangle_{\partial K}, \forall q \in [P_j(K)]^d \quad (17)$$

这里 n_K 是沿边界 ∂K 的单位外法向。对任意整数 $k \geq 1$, 引入下面的有限维空间

$$\Sigma_h := \{\tau_h \in L^2_S(\Omega) : \tau_h|_K \in [P_k(K)]^{d \times d}, \forall K \in T_h\},$$

$$V_h := \{v_h = \{v_{h0}, v_{hb}\} : v_{h0}|_K \in [P_{k+1}(K)]^d, v_{hb}|_e \in [P_k(e)]^d, \forall K \in T_h, e \in E_h\},$$

$$V_h^0 := \{v_h \in V_h : v_{hb}|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

对任意 $K \in T_h, e \in E_h$ 和任意整数 j , 定义 L^2 投影算子 $Q_j^0 : [L^2(K)]^d \rightarrow [P_j(K)]^d, Q_j^b : [L^2(e)]^d \rightarrow [P_j(e)]^d$ 。为了方便记号的处理, 张量的投影仍然记为 Q_j^0, Q_j^b 。

半离散弱有限元格式如下: 对任意的 $t \in [0, T]$, 求 $(\sigma_h, v_h) \in \Sigma_h \times V_h$ 使得

$$a_h(\sigma_{h,t}, \tau_h) + a_h(\sigma_h, \tau_h) - b_h(\tau_h, v_h) = 0, \forall \tau_h \in \Sigma_h \quad (18)$$

$$c_h(v_{h0,t}, w_{h0}) + b_h(\sigma_h, w_h) + s_h(v_h, w_h) = (f, w_{h0}), \forall w_h \in V_h^0 \quad (19)$$

$$\sigma_h(0) = Q_k^0 \psi_0, \quad v_{h0}(0) = Q_{k+1}^0 \varphi_1, \quad (20)$$

其中

$$a_h(\sigma_h, \tau_h) = (C^{-1} \sigma_h, \tau_h), \quad b_h(\tau_h, v_h) = (\varepsilon_{w,k} v_h, \tau_h),$$

$$c_h(v_h, w_h) = (\rho v_h, w_h),$$

$$s_h(v_h, w_h) = \sum_{K \in T_h} \langle \alpha(Q_k^b v_{h0} - v_{hb}), Q_k^b w_{h0} - w_{hb} \rangle,$$

这里 $\varepsilon_{w,k} v_h = \frac{1}{2} (\nabla_{w,k} v_h + \nabla_{w,k}^T v_h)$, 稳定化参数

$\alpha = 2\mu h_E^{-1}$ 。记

$$\sigma_{h,t}(0) = Q_k^0 \gamma, v_{h0,t}(0) = Q_{k+1}^0 p \quad (21)$$

引入半范

$$\|\tau\|_a^2 = a_h(\tau, \tau), \quad \|w\|_c^2 = c_h(w, w).$$

定理 2 对于半离散格式 (18-20) 的数值解 $(\sigma_h, v_h) \in \Sigma_h \times V_h^0$, 成立

$$\|\sigma_h(t)\|_a^2 + \|v_{h0}\|_c^2 \leq e^t (\|\sigma_h(0)\|_a^2 + \|v_{h0}(0)\|_c^2 + \int_0^t \|f\|_0^2 ds) \quad (22)$$

证明：在(18)和(19)中分别取 $(\tau_h, w_h) = (\sigma_h, v_h)$ ，可得

$$a_h(\sigma_{h,t}, \sigma_h) + a_h(\sigma_h, \sigma_h) + c_h(v_{h0,t}, v_{h0}) + s_h(v_h, v_h) = (f, v_{h0}),$$

这意味着

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sigma_h\|_a^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_{h0}\|_c^2 + \|\sigma_h\|_a^2 + s_h(v_h, v_h) \\ & \leq \|f\|_0 \|v_{h0}\|_0 \leq \frac{1}{2} (\|f\|_0^2 + \|v_{h0}\|_0^2) \end{aligned}$$

对上式关于时间 t 进行积分，利用 Bellman-Gronwall 不等式可得稳定性结果(22)。□

4 误差估计

本节主要讨论半离散格式的误差估计，为此，首先引入如下的 inf-sup 条件[4]。

引理 3 对于任意 $w_h = \{w_{h0}, w_{hb}\} \in V_h$ ，成立

$$\sup_{0 \neq \tau_h \in \Sigma_h} \frac{b_h(\tau_h, w_h)}{\|\tau_h\|_0} \geq \|\varepsilon_{w,k} w_h\|_0 \quad (23)$$

设 (σ, v) 是模型问题(9)-(12)的解析解， (σ_h, v_h) 是半离散格式(18)-(20)的解，定义 $\zeta_h = Q_k^0 \sigma - \sigma_i$ ， $\xi_{h0} = Q_{k+1}^0 v - v_{h0}$ ， $\xi_{hb} = Q_k^b v - v_{hb}$ 。记 $\xi_h = \{\xi_{h0}, \xi_{hb}\}$ 。

引理 4 半离散格式(18)-(20)的误差方程

$$a_h(\zeta_{h,t}, \tau_h) + a_h(\zeta_h, \tau_h) - b_h(\tau_h, \{\xi_{h0}, \xi_{hb}\}) = 0 \quad (24)$$

$$c_h(\xi_{h0,t}, w_{h0}) + b_h(\zeta_h, w_h) + s_h(\xi_h, w_h) = l_1(\sigma, w_h) + l_2(v, w_h) \quad (25)$$

其中 $l_1(\sigma, w_h) = \langle w_{h0} - w_{hb}, \sigma n - Q_k^0 \sigma n \rangle_{\partial T_h}$ ，

$$l_2(v, w_h) = \langle \alpha(Q_k^b Q_{k+1}^0 v - Q_k^b v), Q_k^b w_{h0} - w_{hb} \rangle.$$

证明：利用投影性质、交换性质和方程(10)式，可得

$$\begin{aligned} (C^{-1}(Q_k^0 \sigma)_t, \tau_h) + (C^{-1} Q_k^0 \sigma, \tau_h) &= (C^{-1} Q_k^0 \sigma_t, \tau_h) + (C^{-1} Q_k^0 \sigma, \tau_h) \\ &= (C^{-1} \sigma_t, \tau_h) + (C^{-1} \sigma, \tau_h) \\ &= (\varepsilon(v), \tau_h) \end{aligned}$$

和

$$(\varepsilon_{w,k} \{Q_{k+1}^0 v, Q_k^b v\}, \tau_h) = (Q_k^0 \varepsilon(v), \tau_h) = (\varepsilon(v), \tau_h)$$

用 τ_h 在每个单元 K 上对方程(10)测试，可得

$$(C^{-1} \sigma_t, \tau_h) + (C^{-1} \sigma, \tau_h) = (\varepsilon(v), \tau_h),$$

结合上两式，可得(24)。

利用弱梯度的定义(17)和投影性质，

$$\begin{aligned} c_h(Q_{k+1}^0 v_t, w_{h0}) + b_h(Q_k^0 \sigma, w_h) &= (\rho Q_{k+1}^0 v_t, w_{h0})_K + (Q_k^0 \sigma, \varepsilon_{w,k} w_h)_K \\ &= (\rho v_t, w_{h0})_K - (\nabla \cdot Q_k^0 \sigma, w_{h0})_K + \langle Q_k^0 \sigma n_K, w_{hb} \rangle_{\partial K} \\ &= (\rho v_t - \nabla \cdot \sigma, w_{h0})_K + \langle (I - Q_k^0) \sigma n_K, w_{h0} - w_{hb} \rangle_{\partial K} \\ &= (f, w_{h0})_K + \langle (I - Q_k^0) \sigma n_K, w_{h0} - w_{hb} \rangle_{\partial K}, \end{aligned}$$

可得(25)式的证明。□

引理 5 (参考[14] (引理 3.7))

设 $(\sigma, v) \in C^1(L_S^2(\Omega) \cap [H^{k+1}(\Omega)]^{d \times d}) \times C^1([H_0^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\Omega)]^d)$ 是模型问题(9)-(12)的解，对任意 $w_h = \{w_{h0}, w_{hb}\} \in V_h$ ，成立

$$|l_1(\sigma, w_h)| \leq Ch^{k+1} |\sigma|_{k+1} \|\nabla_h w_{h0}\|_0 + Ch^{k+1} |\sigma|_{k+1} \|\alpha^{1/2} (Q_k^b w_{h0} - w_{hb})\|_{\partial T_h}, \quad (26)$$

$$|l_2(v, w_h)| \leq Ch^{k+1} |v|_{k+2} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b w_{h0} - w_{hb})\|_{\partial T_h} \quad (27)$$

引理 6 设 $(\sigma, v) \in C^2(L^2_S(\Omega) \times [H^{k+1}(\Omega)]^{d \times d}) \times C^2([H^1_0(\Omega) \times H^{k+2}(\Omega)]^d)$ 是模型问题(9)-(12)的解, 且半离散格式(7)的解为 $(\sigma_h, v_h) = (\sigma_h, \{v_{h0}, v_{hb}\})$, $n=1, 2, \dots, N$. 那么成立

$$\|\varsigma_h\|^2 + \|\xi_{h0}\|^2 \leq Ch^{2k+2} \int_0^t (|\sigma|_{k+1}^2 + |v|_{k+2}^2 + |\sigma_t|_{k+1}^2 + |v_t|_{k+2}^2) ds. \quad (28)$$

证明: 在引理 4 的误差方程中取 $(\tau_h, w_h) = (\varsigma_h, \xi_h)$, 并对两式相加可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\varsigma_h\|_a^2 + \|\xi_{h0}\|_c^2) + \|\varsigma_h\|_a^2 + s_h(\xi_h, \xi_h) = l_1(\sigma, \xi_h) + l_2(v, \xi_h). \quad (29)$$

再利用引理 5 和 Young 不等式, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\varsigma_h\|_a^2 + \|\xi_{h0}\|_c^2) + \|\varsigma_h\|_a^2 + s_h(\xi_h, \xi_h) \\ & \leq Ch^{2k+2} (|\sigma|_{k+1}^2 + |v|_{k+2}^2) + \frac{1}{2} s_h(\xi_h, \xi_h) + \frac{1}{p} \|\nabla_h \xi_h\|_0^2 \\ & \leq Ch^{2k+2} (|\sigma|_{k+1}^2 + |v|_{k+2}^2) + \frac{1}{2} s_h(\xi_h, \xi_h) + \frac{1}{p} \|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\|_0^2. \end{aligned} \quad (30)$$

对引理 4 的误差方程(24)和(25)对时间 t 求导后, 并分别中取 $\tau_h = \varsigma_{h,t}$ 和 $w_h = \xi_{h,t}$,

$$a_h(\varsigma_{h,t}, \varsigma_{h,t}) + a_h(\varsigma_{h,t}, \varsigma_{h,t}) - b_h(\varsigma_{h,t}, \xi_{h,t}) = 0, \quad c_h(\xi_{h0,t}, \xi_{h0,t}) + b_h(\varsigma_{h,t}, \xi_{h,t}) + s_h(\xi_{h,t}, \xi_{h,t}) = l_1(\sigma_t, \xi_{h,t}) + l_2(v_t, \xi_{h,t}),$$

两式相加, 可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\varsigma_{h,t}\|_a^2 + \|\xi_{h,t}\|_c^2) + \|\varsigma_{h,t}\|_a^2 + s_h(\xi_{h,t}, \xi_{h,t}) = l_1(\sigma_t, \xi_{h,t}) + l_2(v_t, \xi_{h,t}) \quad (31)$$

两边对时间从 0 到 t 积分, 并利用引理 5 和 Young 不等式可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (\|\varsigma_{h,t}\|_a^2(t) + \|\xi_{h,t}\|_c^2(t)) - \frac{1}{2} (\|\varsigma_{h,t}\|_a^2(0) + \|\xi_{h,t}\|_c^2(0)) + \int_0^t \|\varsigma_{h,t}\|_a^2 ds + \int_0^t s_h(\xi_{h,t}, \xi_{h,t}) ds \\ & = l_1(\sigma_t, \xi_h)(t) - l_1(\sigma_t, \xi_h)(0) - \int_0^t l_1(\sigma_{tt}, \xi_h) ds + l_2(v_t, \xi_h)(t) - l_2(v_t, \xi_h)(0) - \int_0^t l_2(v_{tt}, \xi_h) ds \\ & \leq Ch^{k+1} |\sigma_t|_{k+1} \|\nabla_h w_{h0}\|_0 + Ch^{k+1} |\sigma_t|_{k+1} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b \xi_{h0} - \xi_{hb})\|_{\partial T_h} \\ & \quad + Ch^{k+1} |\sigma_t(0)|_{k+1} \|\nabla_h \xi_{h0}(0)\|_0 + Ch^{k+1} |\sigma_t(0)|_{k+1} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b w_{h0} - w_{hb})\|_{\partial T_h}(0) \\ & \quad + Ch^{k+1} \int_0^t |\sigma_{tt}|_{k+1} \|\nabla_h \xi_{h0}\|_0 ds + Ch^{k+1} \int_0^t |\sigma_{tt}|_{k+1} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b \xi_{h0} - \xi_{hb})\|_{\partial T_h} ds \\ & + Ch^{k+1} |v_t|_{k+2} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b \xi_{h0} - \xi_{hb})\|_{\partial T_h} + Ch^{k+1} |v_t(0)|_{k+2} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b \xi_{h0}(0) - \xi_{hb}(0))\|_{\partial T_h} + Ch^{k+1} \int_0^t |v_{tt}|_{k+2} \|\alpha^{1/2}(Q_k^b \xi_{h0} - \xi_{hb})\|_{\partial T_h} ds \\ & \leq Ch^{2k+2} (|\sigma_t|_{k+1}^2 + |v_t|_{k+2}^2 + \int_0^t (|\sigma_{tt}(s)|_{k+1}^2 + |v_{tt}(s)|_{k+2}^2) ds) + \frac{1}{p} \|\nabla_h \xi_{h0}\|_0^2 + \frac{1}{p} \int_0^t \|\nabla_h \xi_{h0}\|_0^2 ds + \frac{1}{p} s_h(\xi_h, \xi_h) + \frac{1}{p} \int_0^t s_h(\xi_h, \xi_h) ds \end{aligned}$$

利用引理的 inf-sup 条件, 可得

$$\|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\| \leq \sup_{0 \neq \tau_h \in \Sigma_h} \frac{b_h(\tau_h, \xi_h)}{\|\tau_h\|_0} = \sup_{0 \neq \tau_h \in \Sigma_h} \frac{a_h(\varsigma_{h,t}, \tau_h) + a_h(\varsigma_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_0} \leq c(\|\varsigma_{h,t}\| + \|\varsigma_h\|) \quad (32)$$

这里 c 是一个正常数, 这意味着

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\|_0^2 &\leq 2c^2(\|\varsigma_{h,t}\|^2 + \|\varsigma_h\|^2) \leq \|\varsigma_{h,t}(0)\|^2 + \|\xi_{h,t}(0)\|^2 + Ch^{2k+2}(\|\sigma_t\|_{k+1}^2 + \|v_t\|_{k+2}^2 + \int_0^t(\|\sigma_{tt}(s)\|_{k+1}^2 + \|v_{tt}(s)\|_{k+2}^2)ds) \\ &\quad + \frac{1}{p}\|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\|_0^2 + \frac{1}{p}\int_0^t\|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\|_0^2 ds + \frac{1}{p}s_h(\xi_h, \xi_h) + \frac{1}{p}\int_0^t s_h(\xi_h, \xi_h)ds \end{aligned} \quad (33)$$

利用 Bellman-Gronwall 不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{w,k}(\xi_h)\|_0^2 &\leq (\|\varsigma_{h,t}(0)\|^2 + \|\xi_{h,t}(0)\|^2 + \frac{1}{p}s_h(\xi_h, \xi_h) + \frac{1}{p}\max_{t \in [0,T]} s_h(\xi_h, \xi_h))e^{t/p} \\ &\quad + Ch^{2k+2}(\|\sigma_t\|_{k+1}^2 + \|v_t\|_{k+2}^2 + \int_0^t(\|\sigma_{tt}(s)\|_{k+1}^2 + \|v_{tt}(s)\|_{k+2}^2)ds) \end{aligned}$$

则,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (a_h(\varsigma_h, \varsigma_h) + c_h(\xi_{h0}, \xi_{h0})) + a_h(\varsigma_h, \varsigma_h) + s_h(\xi_h, \xi_h) \\ &\leq Ch^{2k+2}(\|\sigma\|_{k+1}^2 + \|v\|_{k+2}^2 + \int_0^t(\|\sigma_{tt}(s)\|_{k+1}^2 + \|v_{tt}(s)\|_{k+2}^2)ds) + \frac{1}{p}(\|\varsigma_{h,t}(0)\|^2 + \|\xi_{h,t}(0)\|^2). \end{aligned} \quad (34)$$

再利用 Gronwall 不等式, 可得

$$\|\varsigma_h\|_a^2 + \|\xi_{h0}\|_c^2 \leq Ce^{-t}(\|\varsigma_h(0)\|^2 + \|\xi_{h0}(0)\|^2) + \frac{1}{p}(\|\varsigma_{h,t}(0)\|^2 + \|\xi_{h,t}(0)\|^2) + Ch^{2k+2}(\|\sigma\|_{k+1}^2 + \|v\|_{k+2}^2 + \int_0^t(\|\sigma_{tt}(s)\|_{k+1}^2 + \|v_{tt}(s)\|_{k+2}^2)ds). \quad (35)$$

注意到条件(20)和(21), 可得结论(28)。□

利用三角不等式和投影性质, 可得如下的定理

定理 7 设 $(\sigma, v) \in C^2(L_s^2(\Omega) \times [H^{k+1}(\Omega)]^{d \times d}) \times C^2([H_0^1(\Omega) \times H^{k+2}(\Omega)]^d)$ 是系统(9)-(12)的解, 且半离散格式(18)-(20)的解为 $(\sigma_h, v_h) = (\sigma_h, \{v_{h0}, v_{hb}\})$, 则有

$$\|\sigma - \sigma_h\|_0 + \|v - v_{h0}\|_0 \leq Ch^{k+1} \left(\int_0^t \|\sigma\|_{k+1}^2 + \|v\|_{k+2}^2 + \|\sigma_{tt}\|_{k+1}^2 + \|v_{tt}\|_{k+2}^2 \right)^{1/2} \quad (36)$$

5 结论

本文基于准静态的粘弹性方程, 研究 Maxwell 模型的粘弹性波传播方程, 通过引入速度变量, 对速度-应力形式提出了一类半离散弱有限元格式, 对应力采用 k 次分片多项式, 对速度的内部和边界分别采用 k+1, k 次分片多项式, 最后证明了该格式的唯一稳定解和最优阶误差估计。

参考文献

- [1] BLAND D. The theory of viscoelasticity [M]. Oxford: Pergamon Press, 1960.
- [2] CHRISTENSEN R M. Theory of viscoelasticity: An introduction [M]. Academic press, 2007.
- [3] DILL E H. Continuum mechanics: Elasticity, Plasticity,

Viscoelasticity [M]. CRC Press, 2007.

- [4] DROZDOV A D. Mechanics of viscoelastic solids [M]. Wiley, 1998.
- [5] GURTIN M E, Sternberg E. On the linear theory of viscoelasticity [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, 11(1): 291–356.
- [6] CARCIONE J, KOSLOFF D, KOSLOFF R. Wave propagation simulation in a linear viscoacoustic medium [J]. Geophysical Journal International, 1988, 93: 393–407.
- [7] CARCIONE J, KOSLOFF D, KOSLOFF R. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium [J]. Geophysical Journal International, 1988, 95: 597–611.
- [8] Janovsky V, Shaw S, Warby M K, et. al. Numerical methods for treating problems of viscoelastic isotropic solid deformation [J]. Journal of Computational Applied Mathematics, 63(1-3): 1–107, 1995.

- [9] HA T, SANTOS J, SHEEN D. Nonconforming finite element methods for the simulation of waves in viscoelastic solids [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2002, 191: 5647–5670.
- [10] ROGNES M, WINTHER R. Mixed finite element methods for linear viscoelasticity using weak symmetry [J]. *Mathematical Models & Methods in Applied Sciences*. 2010, 20: 955–985.
- [11] LEE J. Mixed Methods with Weak Symmetry for Time Dependent Problems of Elasticity and Viscoelasticity [D]. PhD Thesis, University of Minnesota, 2012.
- [12] 王少杰, 谢小平. 基于 Maxwell 模型的线性粘弹性波传导问题的半离散/全离散杂交应力有限元法 [J]. *高等学校计算数学学报*, 2021, 43(1): 28-58.
- [13] YUAN H, XIE X P. Mixed finite element discretization for Maxwell viscoelastic model of wave propagation [J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*. 2022, 14(2): 344–364.
- [14] Xiao J H, Zhu Z M, Xie X P. Semi-discrete and fully discrete weak Galerkin finite element methods for a quasistatic Maxwell viscoelastic model [J]. *Numerical Mathematics: Theory, Methods and Applications*. 2023, 16(1): 79-110.
- [15] WANG J P, YE X. A weak Galerkin finite element method for second order elliptic problems [J]. *J. Comput. Appl Math*, 2013, 241: 103-115.
- [16] WANG J P, YE X. A Weak Galerkin mixed finite element method for second-order elliptic problems [J]. *Mathematics of Computation*, 2014, 83: 2101-2126.
- [17] CHEN G, FENG M F, XIE X P. A class of robust WG finite element method for convection diffusion-reaction equations, *Journal of Computational Applied Mathematics*. 315 (2017), 107–125.
- [18] LIN R C, YE X, ZHANG S Y, et. al. A weak Galerkin finite element method for singularly perturbed convection-diffusion-reaction problems [J]. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 2018, 56: 1482–1497.
- [19] CHEN G, XIE X P. A robust weak Galerkin finite element for linear elasticity with strong symmetric stresses [J], *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2016, 16: 389–408.
- [20] 张然. 弱有限元方法在线弹性问题中的应用 [J]. *计算数学*, 2020, 42(1): 1-17.
- [21] ZHAI Q L, ZHANG R, WANG X. A hybridized weak Galerkin finite element scheme for the Stokes equations [J]. *Science. China Mathematics*, 2015, 58: 2455-2472.
- [22] 王军平, 叶秀, 张然. 弱有限元方法简论 [J]. *计算数学*, 2016, 38(3): 289-308.
- [23] 王军平, 王春梅. 椭圆型偏微分方程的弱有限元方法 [J]. *中国科学: 数学*, 2015, 45(7): 1061-1092.
- [24] Wang X P, Gao F Z, Sun Z J. Weak Galerkin finite element method for viscoelastic wave equations [J]. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 2020, 375, 112816.