

企业生产过程中的决策问题研究—— 以 2024 年全国大学生数学建模竞赛 B 题为例



韩佳可, 金东菊, 程相冬*, 李梦晓

南阳师范学院数学与统计学院, 河南南阳 473061

摘要: 在现代制造业全流程生产体系中, 不仅需要考察零配件的生产状况以及产品最终的完成度情况, 还必须要把产品的合格率这一关键因素纳入考量范围来进行企业生产。根据消费者的需求市场需要对成品的价格以及质量进行测试, 通过分析检测成本、拆卸成本、调换成本等多个不同维度的成本因素来权衡是否对成品进行各种操作。本研究主要是借助合理的算法, 充分运用假设性检验、置信区间、拒绝域等得出最优结果, 得到如何对零配件进行检测以及对成品进行合格率测试来使企业获得最大利润。与此同时, 本研究还会结合具体的实际情况, 给出具有针对性和可操作性的决策方案, 以便企业能够根据这些方案更好地开展生产和经营活动。

关键词: 假设性检验; 正态分布; 拒绝域; 置信区间

DOI: [10.57237/j.wjms.2026.01.001](https://doi.org/10.57237/j.wjms.2026.01.001)

Research on Decision-making Problems in the Production Process of Enterprises

Jiake Han, Dongju Jin, Xiangdong Cheng*, Mengxiao Li

School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China

Abstract: In modern manufacturing's end-to-end production system, it is essential not only to take into account the production status of components and the final completion level of products, but also to incorporate the crucial factor of product qualification rate into the scope of consideration for enterprise production. According to consumer demand, the market requires that both the price and quality of finished goods be tested. This necessitates a comprehensive evaluation of whether to carry out various operations on finished products by analyzing cost factors across multiple dimensions - including inspection costs, disassembly costs, and replacement costs. The present study primarily utilizes well-designed algorithms and fully applies statistical methods such as hypothesis testing, confidence intervals, and rejection regions to derive optimal solutions. These approaches enable the determination of how to inspect components and how to conduct qualification-rate testing on finished products, thereby helping firms achieve maximum profit. Furthermore, the research takes specific practical conditions into account and proposes targeted, actionable decision schemes. By following these schemes, enterprises can more effectively plan and execute their production and operational activities, enhancing overall efficiency and competitiveness. In summary, integrating component-level inspection strategies with finished-product

*通信作者: 程相冬, xiangdongcheng321@163.com

qualification assessments within a cost-benefit analytical framework provides a systematic pathway for manufacturers to align product quality assurance with economic objectives under real-world constraints. This methodology supports data-driven decision making and facilitates sustainable growth in increasingly demanding markets.

Keywords: Hypothesis Testing; Normal Distribution; Rejection Region; Confidence Interval

1 引言

随着生产者责任延伸制[1, 2] (Extended Producer Responsibility, EPR) 的立法与推行, 它要求制造商不仅对产品的生产过程负责还要承担产品生命周期中后期阶段的环境责任。这一制度的核心在于将产品的环境责任从传统的政府管理转向生产者本身, 以激励制造商设计更环保的产品, 减少资源浪费和环境污染。这就要求企业在产品设计阶段, 必须考虑产品质量以及使用寿命终结后的再制造问题, 延续产品的性能与价值。企业的生产决策指企业在考虑短期生产活动时, 对于生产什么、生产多少以及如何生产等问题所作的选择[9, 13, 15], 其主要任务是在现有条件下, 通过企业自身的定位, 最合理有效地利用企业的人力、物力和财力以取得最大的经济效益。不同的生产类型对于各类企业, 其效果是不同的, 因此企业必须根据本企业的实际情况选择最符合企业要求的生产类型。再制造不仅能够延长产品的使用寿命, 提高其附加值, 还能在经济、环境和社会层面带来诸多好处。高质量的产品往往能够吸引更多的客户, 提高市场份额, 从而增加销售额[14]。消费者愿意为高质量的产品支付更高的价格, 这也可以提高企业的利润率。高标准的产品质量也可以提升品牌形象, 增强消费者的信任和忠诚度, 从而为企业带来长期的经济效益。然而 Fine [3]析了由于存在学习曲线效应, 产品质量越高, 生产成本削减率越大, 从而使高质量产品随着产品个数的积累所获得的成本节约反而比低质量产品更大。Gal-Or [4]分析了多厂商市场中产品质量与产量之间的关系, 认为在均匀需求分布下, 为提高总产量需要降低产品平均质量, 但这些均没有分析改进质量的固定成本投入。本文主要通过假设性检验、拒绝域、置信区间[5-8]等方法来对相关数据进行分析, 进而对企业的生产决策给出建议。

结合上述分析, 我们以 2024 年全国大学生数学建模竞赛 B 题为例[11], 某企业生产电子产品需要分别购买两种零配件, 并通过对两个零配件组合得出成

品。在得出的成品中若其中一个零配件不合格, 则成品一定不合格; 但两个零配件均合格, 得出的成品也不一定合格。对于不合格的成品, 企业可以选择报废或对其进行拆解并自行承担拆解费用, 但在拆解过程要保证不会对零配件造成损坏。本研究旨在通过假设性检验、置信区间、拒绝域等得出最适合企业发展的方案。

2 模型假设

1. 假设在进行半成品或成品检测时成品作为一个整体, 检测时所有半成品或成品均检测, 反之所有半成品或成品均不检测。
2. 假设购买的同一批零配件的硬度、材质、韧性等性能是基本相同的。
3. 在生产操作过程中没有出现意外情况, 能够保证生产的效率。

3 模型建立与分析

为解决实际研究和决策过程中对总体参数或分布的不确定性判断需求, 产生的假设检验[5]是统计推断的一种重要方法, 并应用于在科学研究、社会调查、经济分析、医学研究、质量控制、决策制定、等众多领域, 我们经常不能直接获得总体的全部信息, 只能通过样本数据去推断总体的特征。假设检验为我们提供了一种基于样本数据的科学依据, 使决策变得更为可靠。在某企业生产电子零件和产品的过程中以设计检测次数尽可能少的抽样检测方案为目标, 在满足标称值为 10%的条件下, 依据所设计的抽样检测方案分别得出在 95%的信度下认定零配件次品率超过标称值, 则拒收这批零配件的条件下, 以及在 90%的信度下认定零配件次品率不超过标称值, 则接收这批零配件的条件下的结果。

3.1 模型建立

第一步：提出假设。

原假设记为 H_0 ，原假设作为研究者想要推翻的假设，表示一种现状。备择假设记为 H_1 ，称为 H_0 的备择假设，表示研究者期望得到的结果。在95%的条件下，如果我们所测出的零配件次品率超过标称值10%，则选择拒收该批零件。在90%的条件下，如果我们所测得的零配件次品率不超过标称值，则选择接受该批零配件。即当 q 满足原假设 H_0 ：零件次品率 $q \leq$ 标称值 $c = 10\%$ ，则接收该批零配件。当 q 满足备择假设 H_1 ：零件次品率 $q >$ 标称值 $c = 10\%$ ，则拒收该批零配件。

第二步：选择检验统计量。

在产品决策中选择合适的检验统计量是至关重要的，在选择检验统计量时需要考虑总体分布以及样本特征，样本量大小等方面选择合适的检验统计量，例如 Z 检验统计量、 F 检验统计量等较为常见。最终根据问题的性质和样本数据的特点，选择适用于样本量较大、总体方差已知且 Z 值分布遵循标准化正态分布的 Z 检验统计量。

当样本量较大时，可以近似看作为正态分布[12]，在标称值已知的情况下通过筛选最终决定选择 Z 检验统计量。具体过程如下：

设总样本次品率为 p ，抽取的样本数为 n ，其所含有的不合格品个数为 X ，标称值即次品率临界值为 c 。可得样本次品率：

$$q = \frac{X}{n} \quad (1)$$

因为该抽样检测为随机抽样，所以 p 符合二项分布：

$$X \sim B(n, p) \quad (2)$$

当所抽取的样本数足够大时，可近似看作为正态分布：

$$X \sim N(np, np(1-p)) \quad (3)$$

由等式(1) (2) (3)得其期望、方差分别为：

$$E(q) = \frac{E(X)}{n} = p; \quad \sigma(q) = \frac{\sigma(X)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

进而得出样品次品率的正态分布：

$$q \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$$

将其标准化后得出最终的检验统计量：

$$Z = \frac{q-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sqrt{n} \sim N(0,1) \quad (4)$$

第三步：确定显著性水平。

选择一个显著性水平(α)，根据问题具体情况取0.05或0.01等。表示为在原假设为真的情况下，出现结果的概率。在95%的置信条件下取 $\alpha = 0.05$ ，在90%的置信条件下取 $\alpha = 0.1$ ，其中 α 等同于下文所得出的 $q - c$ 。

由等式(4)得出样本量计算公式：

$$n = \frac{Z^2 c(1-c)}{(q-c)^2} \quad (5)$$

第四步：给出拒绝域，得出结果。

在第一种情形下，当置信度为95%时若 $q > 0.1$ ，则拒收该批零配件。设置拒绝域 $W = \{|u| > u_{0.95}\}$ ，在标准化正态分布下 $u_{0.95} = 1.645$ 。

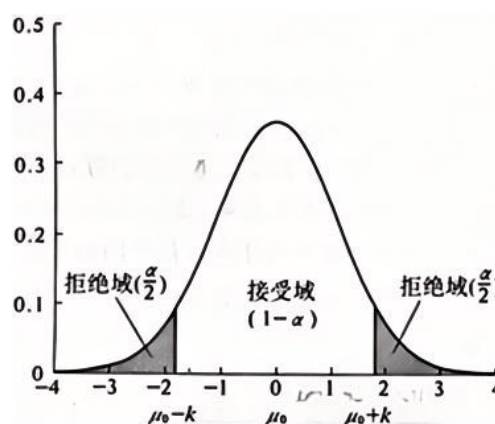


图1 标准化正态分布图像

当检验统计量在拒绝域内时，即

$$|Z| \geq u_{0.95}$$

令 $q - c = \varepsilon$ ，表示为可控范围内的误差，取 $\varepsilon = 0.05$ ，

则当置信度为95%时，样本量为

$$n = \frac{u_{0.95}^2 c(1-c)}{\varepsilon^2}$$

解得 $n = 97$ 。

在第二种情况下，当置信度为90%时若 $q \geq 0.1$ ，则接收该批零配件。设置拒绝域 $W = \{|u| > u_{0.9}\}$ ，在标准化正态分布下 $u_{0.9} = 1.282$ 。

当检验统计量不在拒绝域内时，即

$$|Z| \leq u_{0.9}$$

同理则当置信度为90%时，样本量为

$$n = \frac{u_{0.9}^2 c(1-c)}{\varepsilon^2}$$

故得 $n = 59$ 。

第五步：做出决策。

在95%的置信度下选择抽取样本数为 97 来判定是否接收这批零配件，若次品率超过标称值10%，则选择拒收该批零配件。

在90%的置信度下选择抽取样本数为 59 来判定是否接收这批零配件，若次品率不超过标称值10%，则选择接收该批零配件。

3.2 各个阶段所的决策算法

以 2024 年数学建模试题 B 题的实验数据进行分析，请根据所做的决策，对下表 1 中的情形给出具体的决策方案，并给出决策的依据及相应的指标结果。

当零配件进行检测时，不合格的零配件将直接丢弃，此时定义合格的零配件的购买成本增加，例如当购买 10 个零配件 1 时，我们所花费的购买总成本为 40 元，若其中含有 1 个次品零配件，此时我们只拥有 9 个零配件 1 进入装配程序，定义合格的零配件的购买成本为 $\frac{40}{9}$ ，约为 4.444 元。

假设零配件 1、零配件 2、装配好的每一件产品是否检测分别为 x_1, x_2, x_3 ，不合格成品是否拆解为 x_4 ；零配件 1、零配件 2、成品的次品率分别为 p_1, p_2, p_3 ，检测成本分别为 d_1, d_2, d_3 ，检测费用为 W_2, W_3, W_5 ；零配

件 1、零配件 2 的购买单价分别为 d_4, d_5 ；零配件的购买成本总和为 W_4 ；成品装配成本为 d_6 ，市场售价为 d_7 ，销售收益为 W_1 ；不合格成品的调换损失为 d_8 ，调换成本为 W_6 ；拆解费用为 d_9 ；成品成功售卖的概率为 p_0 。

下面推理所定义的合格的零配件的期望购买单价：

当第一次抽取的零配件 1 为合格品时的合格概率为 $1 - p_1$ ；

当只有第二次抽取的零配件 1 为合格品时的合格概率为 $p_1(1 - p_1)$ ；

当只有第三次抽取的零配件 1 为合格品时的合格概率为 $p_1^2(1 - p_1)$ ；

直到只有第 n 次抽取的零配件 1 为合格品时的合格概率为 $p_1^{n-1}(1 - p_1)$ ；

最终所定义的零配件 1 成本的期望值

$$E = d_4(1 - p_1) + 2d_4p_1(1 - p_1) + \cdots + nd_4p_1^{n-1}(1 - p_1)$$

得

$$E = \frac{d_4(1-p_1^n)}{1-p_1} - nd_4p_1^n$$

当 n 趋向于无穷大时所定义的零配件 1 成本的期望值为

$$E = \frac{d_4}{1-p_1}$$

同理得所定义的零配件 2 成本的期望值为

$$E = \frac{d_5}{1-p_2}$$

表 1 每种方案每个成品所获得的盈利

情况	1	2	3	4	5	6	7	8
1	11.1980	13.7755	11.2200	14.3555	9.8240	11.9156	9.3600	11.9556
2	-2.2559	2.6800	-1.8200	5.1000	-2.3279	1.8400	-2.6600	3.3000
3	4.6940	9.2156	6.6600	11.9556	9.8240	11.9156	9.3600	11.9556
4	-13.9680	-4.9600	-8.4600	3.3000	-1.3280	3.8400	0.3400	7.3000
5	4.7680	1.0756	9.9600	7.4556	6.2880	1.8756	9.8600	6.4556
6	18.5867	19.3545	17.6176	18.5421	17.0130	17.3295	15.5926	16.0421

零配件 1 和零配件 2 装配好一个成品，当合格的成品进入市场售卖企业才可以获得盈利，因此我们可以先讨论装配好的成品的合格率，即进入市场后不被退货的概率。

记事件 A 为进入装配程序的零配件 1，即

$$P(A) = (1 - x_1)p_1 \quad (6)$$

记事件 B 为进入装配程序的零配件 2，即

$$P(B) = (1 - x_2)p_2 \quad (7)$$

故进入装配程序的零配件的不合格率为

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (8)$$

由于当两个零配件均合格时，装配的成品也不一定合格，根据表 1 可得该种情况的不合格率为 $p_3 = 10\%$ ，合格率为 $1 - p_3$ 。

则最终能够成功售卖的概率为

$$p_0 = (1 - P(A + B))(1 - p_3) \quad (9)$$

由等式(6) (7) (8) (9)得

$$p_0 = (1 - (1 - x_1)p_1 - (1 - x_2)p_2 + (1 - x_1)(1 - x_2)p_1p_2)(1 - p_3)$$

装配好的每一件成品所获得的销售收益为

$$W_1 = d_7 p_0$$

零配件 1 的检测费用为

$$W_2 = x_1 d_1$$

零配件 2 的检测费用为

$$W_3 = x_2 d_2$$

最终在选择是否检测时, 零配件的购买成本总费

用为

$$W_4 = \frac{d_4}{1 - x_1 p_1} + \frac{d_5}{1 - x_2 p_2}$$

装配好的成品的检测费用为

$$W_5 = x_3 d_3$$

用户所退回的不合格成品的调换损失为

$$W_6 = (1 - x_3)(1 - p_0)d_8$$

最终为了得出合理的方案我们需要求出获利最大,

即

$$\max: W = W_1 - W_2 - W_3 - W_4 - W_5 - W_6$$

得目标函数为:

$$W = d_7 p_0 - x_1 d_1 - x_2 d_2 - \frac{d_4}{1 - x_1 p_1} - \frac{d_5}{1 - x_2 p_2} - x_3 d_3 - (1 - x_3)(1 - p_0)d_8 \quad (10)$$

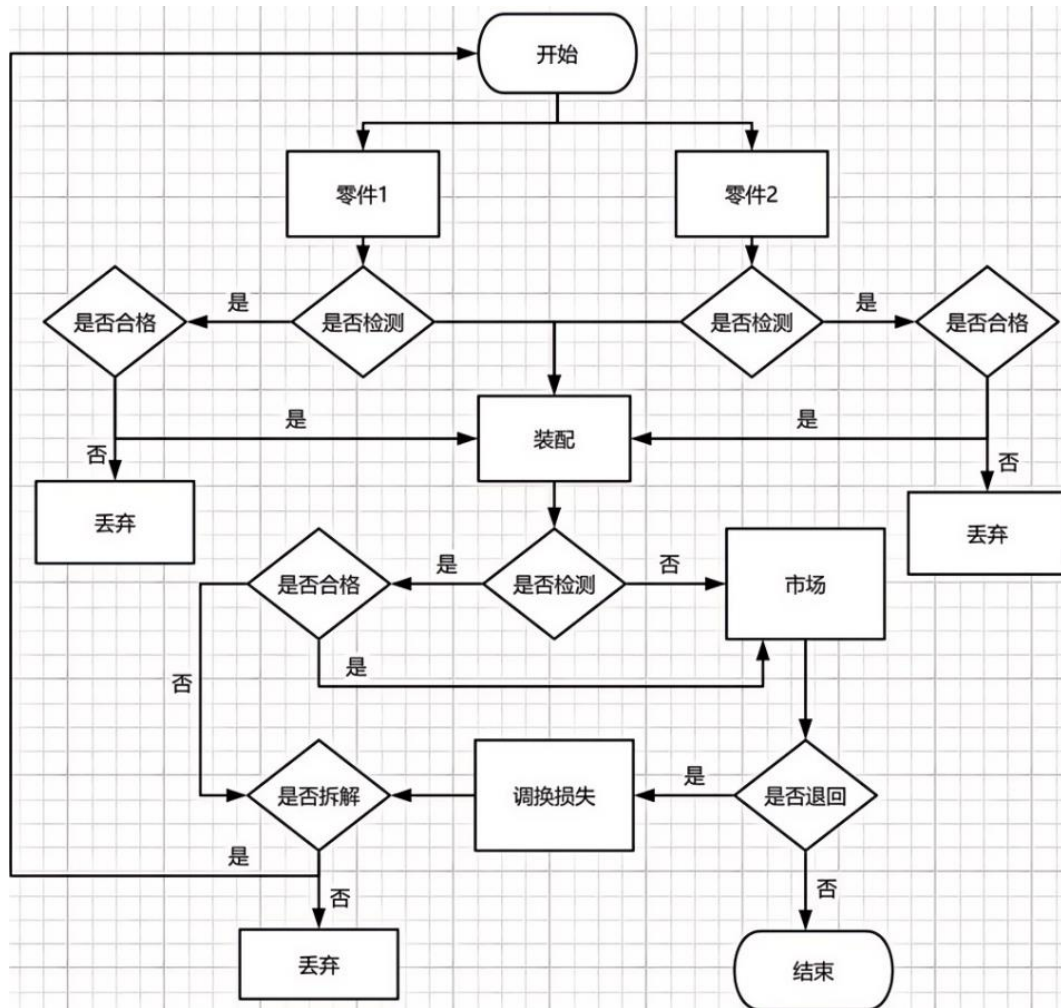


图 2 流程图

已知两种零配件和成品次品率，为企业生产中的各个阶段进行决策：

- a) 零配件（零配件 1 或/和零配件 2）是否进行检测，如果某种零配件不进行检测，则全部直接进入装配环节；如果进行检测，所检测到的不合格品将直接丢弃。
- b) 对每一件成品是否进行检测，如果不进行检测，则全部成品直接进入市场；如果进行检测，则合格产品进入市场，不合格产品进行下一步处理。
- c) 对不合格产品是否进行拆解，如果进行拆解，拆解后的零件将重复步骤 a)和 b)，做下一步处

理；如果不进行拆解，不合格成品将直接丢弃。
d) 对于客户所退回的不合格产品，企业将无条件进行调换并自行承担费用，不合格产品重复步骤 c)。

通过对该公式(10)的计算可得出 x_1, x_2, x_3 的取值，用来判断零配件以及成品是否检测。

在考虑对不合格产品是否进行拆解时，通过比较拆解费用与装配费用之和 $d_9 + d_6$ 与购买零配件的单价之和 $d_4 + d_5$ 的大小，当 $d_9 + d_6 > d_4 + d_5$ 时选择不拆解不合格成品，反之选择拆解不合格成品。

通过对目标函数的计算得到 x_1, x_2, x_3 的不同情况所对应的不同数值，具体结果如下表 2 所示：

表 2 不同情况的 x_1, x_2, x_3 的结果

情况	零配件 1 是否检测	零配件 2 是否检测	装配好的成品是否检测
1	1	1	0
2	1	1	0
3	1	1	0
4	1	1	1
5	0	1	0
6	1	0	0

通过对比 d_9 和 $d_4 + d_5 + d_5$ 的大小，情况 1 至情况 5 的不合格成品进行拆解，我们选择情况 6 的不合格成品不进行拆解。

借助以上两种决策依据我们所得出的决策方案以及相应指标为：

情况 1：零配件 1 进行检测，零配件 2 进行检测，装配好的成品不进行检测，所退回的不合格成品进行拆解；每个成品所获得的盈利为 14.3556 元。

情况 2：零配件 1 进行检测，零配件 2 进行检测，装配好的成品不进行检测，所退回的不合格成品进行拆解；每个成品所获得的盈利为 5.1000 元。

情况 3：零配件 1 进行检测，零配件 2 进行检测，装配好的成品不进行检测，所退回的不合格成品进行拆解；每个成品所获得的盈利为 11.9556 元。

情况 4：零配件 1 进行检测，零配件 2 进行检测，装配好的成品进行检测，所退回的不合格成品进行拆解；每个成品所获得的盈利为 7.3000 元。

情况 5：零配件 1 不进行检测，零配件 2 进行检测，装配好的成品不进行检测，所退回的不合格成品进行拆解；每个成品所获得的盈利为 9.9600 元。

情况 6：零配件 1 进行检测，零配件 2 不进行检测，装配好的成品不进行检测，所退回的不合格成品不进

行拆解；每个成品所获得的盈利为 19.3545 元。

4 总结

本文借助假设性检验和概率统计方法对生产过程中的各个阶段进行决策，通过定期进行假设检验来评估是否值得投资于更昂贵的原材料或更先进的生产设备，及时发现生产过程中的问题，帮助企业进行成本效益分析，从而提高产品质量和客户满意。此外，企业可以基于数据和统计分析评估不同方案的优劣，从而做出更为科学的决策，并且与[10]做比较我们发现虽然用的方法（工具）不一样，但是我们得到的决策方案基本类似。

参考文献

[1] 孟庆瑜, 刘婷婷. 生态环境法典视域下生产者责任延伸制度的规范供给和配套完善 [J], 2022 第 4 期: 175-184.

[2] 谢家平, 迟琳娜, 梁玲. 基于产品质量内生的制造/再制造最优生产决策 [J], 2012, 第 15 卷第 8 期: 12-13.

[3] Fine C H. Quality improvement and learning in productive systems [J]. Management Science, 1986, 32(10): 1301-1315.

- [4] Gal-Or E. Quality and quantity competition [J]. The Bell Journal of Economics, 1983, 14(2): 590-600.
- [5] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程 (第三版) [M], 北京: 高等教育出版社, 2019. 11 (2023.4 重印).
- [6] 杨波, 胡钊. 浅议假设检验中原假设的设置 [J], 2023, 第 38 卷第 3 期: 91-95.
- [7] 卢亚丽, 假设检验中两类错误分析与实验, 河南教育学院学报 (自然科学版) [J], 2011, 第 20 卷第 3 期: 10-12.
- [8] 徐永朋, 某电子产品抽检方案探讨, 航空兵器 [J]. 1995, 第 3 期: 23-24.
- [9] 沈维军, 沈少军. 企业成本管理与经营决策研究, 中国电子情[J], 2024, 第 21 卷: 16-18.
- [10] 梁海洲, 王佳璐, 袁欣, 等. 基于改良模拟退火算法和统计方法的生产过程决策, 天府数学 [J], 2025, 第 03 卷: 22-29.
- [11] 全国大学生数学建模竞赛组委会. 2024 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题 [EB/OL]. (2024-09-05) [2025-03-03].
https://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/a0c1fb5c31d43551f08cd8ad16870444.html
- [12] 姜启源, 谢金星, 数学建模案例选集, [M], 北京: 高等教育出版社. 2006.
- [13] 李泰新, 靳析函, 基于动态规划和顺序概率比检验的企业生产决策优化研究, 市场瞭望 [J], 2024, 第 24 卷: 7-9.
- [14] 潘蓉蓉; 罗建强; 杨子超, 数字技术赋能制造企业服务化转型: 理论分析与展望[J]. 系统工程理论与实践, 2023, 第 11 期, 22-27.
- [15] 吴鹏; 吕有厂, 随机需求下考虑半成品库存的多周期生产决策优化. 运筹与管理 [J], 2014, 第 02 卷: 11-17.