

多元函数的全导数及其应用



杨春玲, 张传芳*

广东石油化工学院理学院, 广东茂名 525000

摘要: 讨论多元函数的全导数概念以及与连续、可微等概念之间的关系。结果表明: 首先, 二元函数全导数存在是函数连续的充分条件而非必要条件; 其次, 在通常情况下, 二元函数全导数存在与偏导数存在之间没有蕴含关系, 但若二元函数的全导数等于零, 则关于两个自变量的偏导数都存在且均为零; 第三, 一般来说, 二元函数全导数存在和可微之间也没有蕴含关系, 但全导数等于零等价于函数在该点可微且全微分也等于零; 第四, 二元函数全导数存在是该点处沿任意方向的方向导数存在的充分条件而非必要条件。最后, 给出全导数的一个应用——微分中值定理, 丰富了多元函数微分学的理论。

关键词: 全导数; 偏导数; 连续; 可微

DOI: [10.57237/j.wjms.2025.02.003](https://doi.org/10.57237/j.wjms.2025.02.003)

The Total Derivative of Multivariate Functions and Its Applications

Yang Chunling, Zhang Chuanfang*

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming 525000, China

Abstract: In this paper, we consider the concept of total derivatives of functions and its relationship with continuity, differentiability, and other concepts. The results indicate that: first, the existence of the total derivative of a bivariate function is a sufficient but not necessary condition for the function's continuity; second, in general, there is no mutually implicative relationship between the existence of the total derivative and the existence of partial derivatives for bivariate functions. However, if the total derivative of a bivariate function equals zero, then the partial derivatives with respect to both independent variables exist and are also zero; third, generally, there is no implicative relationship between the existence of the total derivative and differentiability for bivariate functions. Nevertheless, the total derivative being equal to zero is equivalent to the function being differentiable at that point and the total differential also being equal to zero; fourth, the existence of the total derivative of a bivariate function is a sufficient but not necessary condition for the existence of the directional derivative along any direction at that point. Finally, we presents an application of total derivatives—the mean value theorem, enriching the theory of differential calculus of multivariate functions.

Keywords: Total Derivative; Partial Derivative; Continuity; Differentiability

基金项目: 广东石油化工学院自然科学研究项目 (2019rc101).

*通信作者: 张传芳, chuanfangzhang@gdupt.edu.cn

收稿日期: 2025-09-01; 接受日期: 2025-10-23; 在线出版日期: 2025-11-12

<http://www.wjoms.com>

1 引言

函数的导数的概念是微分学的基础,特别是一元函数的导数可以帮助我们研究函数的单调性、凹凸性等函数性态[1-6]。既然导数如此重要,如何将一元函数的导数推广到多元函数呢?许多文献对此进行了尝试,除了传统的多元函数的偏导数或者方向导数外,文献[7, 8]讨论了对称偏导数的性质和应用;文献[9]讨论了多元函数可微的定义及两种特殊的导数;文献[10, 11]讨论了分数阶导数及其性质;文献[12]主要讨论了向量值函数的方向导数、Gateaux 导数和 Frechet 导数及它们之间的相互关系;文献[13]把导数的概念推广到无限维空间中,在 Banach 空间上得到了 Lipschitz 函数的两种常见的 G-导数和 F-导数,并分别研究了这两种导数的基本性质以及它们之间的联系;文献[14]以单元的角度介绍了函数的导数及微分,从一元到多元,再到欧氏空间,最后推广到一般的泛函;文献[15]减弱了一维区域上弱导数的定义,推广到了更一般的向量值函数的弱导数,并应用此结论简化了一个重要定理的证明;文献[16]中也给出了导数的一种推广形式,讨论了这种推广形式的优缺点,本文称文献[16]中这种推广的导数为全导数,并尝试在文献[16]的基础上进一步讨论这种全导数与连续、可微等概念之间的关系及应用。

2 预备知识

2.1 全导数的定义

设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域是 D , 点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 且函数在 P_0 的某邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

存在, 则称函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可导[16], 并称这个极限为函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 关于 xy 的二元全导数, 简称为全导数, 记为: $f_{(xy)}(x_0, y_0)$ 。特别地, 当 $\Delta y = 0$ 时, 称其为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 x 的全导数, 记为: $f_{(x)}(x_0, y_0)$; 当 $\Delta x = 0$ 时, 称其为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于 y 的全导数, 记为: $f_{(y)}(x_0, y_0)$ 。

对于一元函数来说, 全导数为

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\sqrt{\Delta x^2}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{|\Delta x|},$$

记为: $f'_{(x)}(x_0)$, 显然此定义不同于传统的导数定义。特别地, 对于 $f(x) = |x|$, 有 $f'_{(x)}(0) = 1$, 即绝对值函数在原点处存在全导数且全导数为 1。

2.2 全导数的推广

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某一邻域内有定义, 若极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

存在, 则称其为三元函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 关于 xyz 的三元全导数, 记为: $f_{(xyz)}(x_0, y_0, z_0)$, 特别地, 当 $\Delta z = 0$ 时, 称其为函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 关于 xy 的全导数, 记为: $f_{(xy)}(x_0, y_0, z_0)$; 类似可定义关于 yz 的全导数及关于 xz 的全导数。当 $\Delta y = 0, \Delta z = 0$ 时, 称其为函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 关于 x 的全导数, 记为: $f_{(x)}(x_0, y_0, z_0)$; 类似可定义关于 y 的全导数及关于 z 的全导数。

同理, 四元函数甚至更多元函数的全导数都可以类似的定义。

3 主要结论

3.1 全导数与连续的关系

定理 3.1 [16] 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D , 点 $P_0(x_0, y_0) \in D$ 且该函数在 P_0 的某邻域内有定义, 若 $f_{(xy)}(x_0, y_0)$ 存在, 则 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 连续。

反之, 结论不成立, 即 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续, 得不出全导数存在。如

例 3.1 函数 $f(x, y) = x + y, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。

解 显然该函数在原点处连续, 但由于二重极限

$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x + \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ 不存在, 故在 $(0,0)$ 点处的全导数 $f_{(xy)}(0,0)$ 不存在。

因此, 二元函数全导数存在是连续的充分非必要条件。

3.2 全导数与偏导数的关系

二元函数 $z = f(x, y)$ 关于 x, y 偏导数存在不能得出全导数存在。如

例 3.2 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

解 在 原点处, 关于 x 的偏导数

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0.$$

同理, 关于 y 的偏导数 $f_y(0, 0) = 0$, 但因二重极限

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

不存在, 故在 原点处的全导数 $f_{(xy)}(0, 0)$ 不存在。

反之, 二元函数 $z = f(x, y)$ 的全导数存在, 也不一定能得出函数关于 x 或 y 的偏导数存在。如

例 3.3 函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 。

解 根据全导数的定义有

$$f_{(xy)}(0, 0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0 + \Delta x, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 1$$

所以在 原点处全导数存在且全导数等于 1, 但是因极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

均不存在, 因此, 在 原点处两个偏导数均不存在。

若多元函数的全导数为零, 则可以得出两个偏导数均存在的结论。

定理 3.2 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义且 $f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$, 则函数 $f(x, y)$ 关于 x 和 y 偏导数一定存在且均为 0。

证明 由全导数的定义, 由 $f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$ 必有 $f_{(x)}(x_0, y_0) = f_{(y)}(x_0, y_0) = 0$, 再由偏导数的定义及无穷小量的性质有

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\sqrt{\Delta x^2}} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 0.$$

类似可得 $f_y(x_0, y_0) = 0$ ，即关于 x 和 y 两个偏导数均存在且均为 0。

3.3 全导数与可微的关系

二元函数可微得不出全导数存在。如前面的例 3.1 中的函数 $f(x, y) = x + y$ ，显然该函数在点 $(0, 0)$ 处可微，但该点处的全导数 $f_{(xy)}(0, 0)$ 不存在。

另一方面，二元函数全导数存在也不一定能得出函数可微。如前面的例 3.3 中的函数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，在原点处的全导数 $f_{(xy)}(0, 0) = 1$ ，但是偏导数 $f_x(0, 0)$ 与

$f_y(0, 0)$ 均不存在，因此， $f(x, y)$ 在原点处不可微。

若全导数等于零，则可得函数的可微性。

定理 3.3 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，则 $f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$ 的充要条件是函数在 (x_0, y_0) 点可微且 $dz|_{(x_0, y_0)} = 0$ 。

证明 必要性 由定理 3.2 知

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0,$$

故

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$$

故函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微且

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = 0$$

充分性 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 可微且 $dz|_{(x_0, y_0)} = 0$ ，则 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ 且

$$0 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = f_{(xy)}(x_0, y_0).$$

由定理 3.3 易得如下三个推论：

推论 3.1 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，则 $f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$ 的充要条件是 $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ 。

推论 3.2 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，则 $f_{(xy)}(x_0, y_0) = 0$ 的充要条件是 (x_0, y_0) 为驻点。

推论 3.3 若函数 $z = f(x, y)$ ， $(x, y) \in D$ ，则 $f_{(xy)}(x, y) \equiv 0$ 的充要条件是 $f(x, y) \equiv C$ 。

3.4 全导数与方向导数的关系

定理 3.4 [16] 设二元函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义且在 $P_0(x_0, y_0)$ 处的全导数 $f_{(xy)}(x_0, y_0)$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处沿着任意方向 l 的方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)}$ 都存在，且 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_{(xy)}(x_0, y_0)$ 。

反之，函数 $z = f(x, y)$ 在某点处沿任意方向的方向导数存在，不一定能得到全导数存在。如

例 3.4 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

解 在 $(0, 0)$ 点沿任意方向 l 的方向导数都存在且等于 0，但函数在该点不连续，从而，由定理 3.1 知在该点处的全导数不存在。

4 全导数的应用

定理 4.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，则 $f'_{(x)}(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0$ 。

证明 必要性 若 $f'_{(x)}(x_0) = 0$ ，则利用无穷小量的性质可得

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{|\Delta x|} \cdot \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 0$$

充分性 若 $f'(x_0) = 0$ ，则利用无穷小量的性质可得

$$f'_{(x)}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{|\Delta x|} = 0.$$

$$f'_{(x)}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

由此可得一元函数用全导数表示的微分中值定理:

定理 4.2 (一元函数微分中值定理) 设函数

$y = f(x)$ 满足如下条件:

(i) $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(ii) $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上存在全导数,

则在开区间 (a, b) 上至少存在一点 ξ , 使得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_{(x)}(\xi, y)(x - x_0) + f'_{(y)}(x_0, \eta)(y - y_0)$$

其中 $\xi = x_0 + \theta_1(x - x_0)$, $\eta = y_0 + \theta_2(y - y_0)$

证明 令 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ 。由定理 4.2, 存在 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_{(x)}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x$$

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_{(y)}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y$$

令 $\xi = x_0 + \theta_1 \Delta x$, $\eta = y_0 + \theta_2 \Delta y$, 则

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f'_{(x)}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_{(y)}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \\ &= f'_{(x)}(\xi, y)(x - x_0) + f'_{(y)}(x_0, \eta)(y - y_0). \end{aligned}$$

5 结束语

本文讨论了多元函数的全导数的定义以及全导数与连续、可微、偏导数、方向导数等概念之间的关系, 给出了基于全导数的微分中值定理。当然可以进一步讨论关于 x 或 y 全导数与关于 x 或 y 偏导数的关系, 或者关于 x 或 y 全导数与连续、可微等之间的关系, 由于讨论方法类似, 在此不再赘述。利用全导数虽然有“可导”等价于可微, “可导”一定连续等结论, 但这种全导数的定义也存在一定的不足。严格来说: 全导数的极限定义只能是单侧极限, 这就是这种推广为何没有能够成为多元函数导数的真正原因[16]。也正是因为现存理论各种不足, 才促使我们不断思考, 不断前进, 使理论趋于完美, 这也正是推动科技进步的主要原因之一。本文的讨论丰富了多元函数微分学的内容, 完善了数学分析中有关导数的理论。

由此结论又可得多元函数用全导数表示的微分中值定理:

定理 4.3 (多元函数微分中值定理) 设二元函数

$z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 某邻域 $U(P_0)$ 内有定义且存在

全导数, 则对于 $(x, y) \in U(P_0)$, 存在 $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$, 使得

参考文献

- [1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册 [M]. 第五版. 北京: 高等教育出版社. 2019. 5.
- [2] 刘名生, 冯伟贞, 韩彦昌. 数学分析 (一) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社. 2019. 12.
- [3] 同济大学数学科学学院. 高等数学: 上册 [M]. 第八版. 北京: 高等教育出版社. 2023. 6.
- [4] 刘玉琚, 傅沛仁, 刘伟等. 数学分析讲义: 上册 [M]. 第六版. 北京: 高等教育出版社. 2019. 4.
- [5] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析: 上册 [M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社. 2019. 5.
- [6] 张筑生. 数学分析新讲: 第一册 (重排本) [M]. 第二版. 北京: 北京大学出版社. 2021. 8.
- [7] 李秀林. 对称偏导数及其性质 [J]. 数学学习与研究, 2010, (03): 108-109.
- [8] 祝英杰, 李冠英. 二元函数的对称偏导数及其相关理论 [J]. 长春大学学报, 2007, (10): 20-23.

- [9] 王珍娥. 试论一元函数导数概念的多元推广 [J]. 山西大同大学学报 (自然科学版), 2007, (04): 75-76+87.
- [10] 武女则. 分数阶导数、积分的性质及几何意义 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2013, 29 (01): 19-22.
- [11] 梁家辉. Caputo 分数阶导数的一些性质 [J]. 数学的实践与认识, 2021, 51 (09): 256-269.
- [12] 张月梅. 向量值函数的导数 [J]. 吉林师范大学学报 (自然科学版), 2014, 35 (01): 57-59+65.
- [13] 殷羽. Lipschitz 函数的广义导数 [J]. 赤峰学院学报 (自然科学版), 2012, 28 (12): 10-12.
- [14] 朱瑾. 导数的定义及推广 [J]. 高等数学研究, 2010, 13 (01): 36-38.
- [15] 熊飞, 胡洪仁, 操安琪等. 弱导数相关概念及其应用 [J]. 高等数学研究, 2025, 28 (04): 117-121.
- [16] 朱佑彬, 冯象初, 刘磊等. 关于多元函数的“导数”的一点思考 [J]. 西安电子科技大学, 2023, 26 (3): 2-30.

作者简介

杨春玲

1976 年生, 硕士, 副教授. 目前主要从事《高等数学》、《线性代数》、《复变函数》等课程的教学工作, 研究方向是应用数学中的多属性决策及综合评价方法.

E-mail: kyyangchunling@126.com

张传芳

1978 年生, 博士, 讲师. 目前主要从事《高等数学》、《数学分析》、《组合数学》等课程的教学工作, 研究方向是非线性分析, 特别是临界点理论及其在非线性微分方程解的存在性与多解性研究中的应用.

E-mail: chuanfangzhang@gdupt.edu.cn