

# 2021 年中国的新冠病毒的发展预测和控制



唐晓清<sup>1,\*</sup>, 巩轶凡<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 上海立信会计金融学院统计与数学学院, 上海 201620

<sup>2</sup> 兰卡斯特大学金融学院, 英国兰卡斯特 LA2 0PF

**摘要:** 自从 2019 年底发现新冠病毒以来, 新冠病毒开始在全球各国大流行, 且毒株不断变异。我国实行的“动态清零”政策, 取得了很好的防疫效果。在 2021 年春夏, 中国大陆的本土复发毒株和境外输入的变异体 *Delta* 和 *Delta*<sup>+</sup> 毒株又形成一波疫情大流行。目的: 为了进一步研究混合毒株的基本再生数和传染率等重要参数的变化情况, 根据 SAIR 数学模型对于以后的确诊病例和无症状病例的数量风险进行了预测。并讨论各项防疫措施的效果。方法: 使用了公式计算和数据拟合的方法。结果: 重新计算得出了各项重要参数的数值, 讨论了防疫措施的效果数据。结论: 我们的 SAIR 模型模拟的确诊病例数, 无症状感染者数量, 以及各项病例数的发展情况, 与实际数据是符合的很好的。新的传染参数等数据说明了新的混合毒株的传染性比过去的原始毒株的有了很大的加强。特别地, 无症状感染者的数量, 比以前有了很大的增加。需要引起大家的重视。模拟显示了各项严格防疫措施是有效的, 需要坚持严格防疫。

**关键词:** 新型冠状病毒; SAIR 模型; Delta 毒株; 确诊病例; 无症状感染

**DOI:** [10.57237/j.mrf.2022.01.005](https://doi.org/10.57237/j.mrf.2022.01.005)

## Development, Prediction and Control of the COVID-19 in 2021 China

Tang Xiao-qing<sup>1,\*</sup>, Gong Yi-fang<sup>2</sup>

<sup>1</sup> School of Statistics and Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai 201620, China

<sup>2</sup> College of Finance, Lancaster University, Lancaster LA2 0PF, UK

**Abstract:** Since the discovery of COVID-19 at the end of 2019, COVID-19 has begun to circulate in various countries around the world, and the virus strains are constantly mutating. The policy of "dynamic zero clearing" implemented in China has achieved good epidemic prevention effect. In the spring and summer of 2021, the local recurrent strains in Chinese Mainland and the imported variants *Delta* strain and *Delta*<sup>+</sup> strains formed another wave of epidemic. *Objective:* In order to further study the changes of important parameters such as the basic reproduction number and infection rate of mixed strains, the number risk of confirmed cases and asymptomatic cases in the future was predicted according to the SAIR mathematical model. The effects of various epidemic prevention measures are discussed. *Methods:* Formula calculation and data fitting were used. *Results:* The values of important parameters were calculated again, and the effect data of epidemic prevention measures were discussed. *Conclusion:* The number of confirmed cases, the number of

\*通信作者: 唐晓清, tangxiaoqing5168@163.com

asymptomatic infections, and the development of the number of cases simulated by our SAIR model are in good agreement with the actual data. The new infection parameters and other data show that the infectivity of the new mixed strains is much stronger than that of the original strains in the past. In particular, the number of asymptomatic infections has increased significantly. We need to draw everyone's attention. The simulation shows that all strict epidemic prevention measures are effective, and strict epidemic prevention should be adhered to.

**Keywords:** COVID-19; SAIR Model; Delta Strain; Confirmed Case; Asymptomatic Case

## 1 引言

自从新冠病毒 COVID-19 于 2019 年底于武汉首次被报道, 早期由于人们对于病毒的传播机理和传播方式的认知不足, 以及随后的春节人口大流动, 使得疫情迅速向全国扩散蔓延。2020 年 1 月 23 日, 武汉进行封城, 并且城内各小区进行封闭, 实行严格的格子化管理。随后全国各地相继进行封闭, 使得疫情得到了迅速的、有效的遏制, 中国逐步取得疫情防控的阶段性成功。不幸的是, 由于各种原因导致疫情防控措施的不足, 使得以后疫情逐渐在世界各地爆发, 其中, 特别严重的有美国, 印度, 巴西, 俄罗斯和印尼等等。截止 2021 年 7 月底, 根据美国约翰斯·霍普金斯大学统计, 全球累积确诊病例接近 2 亿, 死亡病例超 400 万。全球疫情的爆发, 对于世界各国各地区已经不仅仅是一场重大突发公共卫生事件, 而且引发一系列严重的经济和社会危机, 甚至可能造成政治危机。由于中国国内的持续的严格疫情管控措施, 使得国内的疫情在 2020 年逐步向好, 到 2020 年底几乎完全控制住, 新增病例近乎消失, 连续数月实现病例“0 新增”。与此同时, 国外大部分国家由于制度, 人口密度, 生活习惯, 文化和观念等原因, 对于传染性强的 COVID-19 病毒的管控措施有限, 造成病毒的失控, 泛滥和猛烈爆发, 随后又造成病毒的各种变异体。最早发现于印度的病毒变异体 *Delta* (新冠病毒变异毒株 B.1.617.2) 和  $\Delta^+$ , 传染性和毒性大大强于原始毒株, 被世界卫生组织特意标注为“值得关注的变异体 (Variants of Concern, VOC)”, 迅速在全球扩散传播。目前, 美国和欧洲, 以及印度的很大比例的病例, 都是 *Delta* 和  $\Delta^+$  毒株的感染病例。2021 年春季开始, 中国大陆各地陆续有零星的原始毒株的复发病例, 加上国外输入的病毒变异体 *Delta* 和  $\Delta^+$ 。所以, 目前中国大陆的病例, 实际是这三种毒株的混合病例群。并且, 目前国家卫健委公布数据的时候, 并没有区分哪些病例是原始毒株病例, 哪些病例又是 *Delta* 和  $\Delta^+$  病例。所以, 本文后面的研

究, 是把这三种病例的混合体作为一个整体。

对于新冠病毒传播机制和数学模型已经有不少, 比如, 使用非线性回归[1, 2]方法的, 不足之处在于忽视了传染病传播的整体数学机制; 基于 SIR 模型[3]和 SEIR 模型[4, 5], 前者失于简单, 后者与新冠病毒病例 COVID-19 特性不符, SEIR 中的 E(Exposed) 是不具有传染性的, 而新冠病毒的无症状感染者是有传染性的; 还有专门研究无症状感染的病例与方法[6, 7]的。

本文根据国家卫健委官网公布的数据, 运用作者此前提出的一种符合新冠病毒 COVID-19 传播特点的新型 SAIR 随机动力学模型, 对于我国的各病例数量以后的发展进行预测, 并讨论控制措施的控制效果。

## 2 模型与参数

### 2.1 关于 SAIR 模型

作者去年已经应用此 SAIR 模型[8]动态模拟了 2020 年中国大陆的病例数据, 这是一个成熟可靠的数学模型。这里再做一下仓室模型的说明。

模型假设如下:

- 1) 在疾病传播期内所考察地区的总人数不变, 不考虑生死和迁移 (本文因为南京市, 扬州市, 张家界市和郑州市等疫情突出城市的人口数量庞大, 而且, 一旦发现病例会迅速封城, 不准人员随意出入。此外, 短期内, 新出生人口和死亡人口数, 相对于这么庞大的人口基数, 可以近似认为是总人数不变的);
- 2) 人群分为易感染者 S (Susceptible people)、无症状感染者 A (Asymptomatic infection)、感染者 I (Infective) 和移出者 R (Removed) 四类。根据新冠病毒 COVID-19 的传播特点, 这四类人群的关系是: 易感染者 S 可以转化成无症

状感染者 A 和感染者 I，无症状感染者 A 可以转化成感染者 I，也可以转化成移出者 R（康复者），感染者 I 治愈后转化成移出者 R。特别要注意的是，无症状感染者他们本身是携带病毒的，只是没有表现出感染（即生病）的症状，或者只有很轻微的感染症状。但是他们依然具有传染性，只是他们的传染性一般比感染者要弱一点罢了。他们中有些日后会转化成确诊病例，有些日后依然保持无症状者，还有些日后自愈，变成移除者。但由于无症状感染者的传染的隐蔽性，风险也是很大的！

这四个因素的关系，如下图 1 所示：

图1.四因素关系图

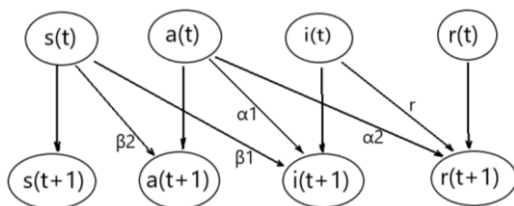


图 1 四种因素关系图

- 3) 设区域内人口总数是  $N$ ， $t$  是时间  $T$  的某个时刻， $s(t)$  是时间  $t$  时候的易感染者（即健康人）数量； $A(t)$  是时间  $t$  时候的无症状感染者数量； $I(t)$  是时间  $t$  时候的感染者（即病人）数量； $R(t)$  是时间  $t$  时候的康复者数量。所以， $S(t) + A(t) + I(t) + R(t) = l$ 。

它们的比率为：

$$\frac{S(t)}{N} = s(t), \frac{A(t)}{N} = a(t), \frac{I(t)}{N} = i(t), \frac{R(t)}{N} = r(t)$$

而且，各比率的关系为： $s(t) + a(t) + i(t) + r(t) = 1$ 。

它们的导数，即增长率，根据图 1 有如下动力学

方程：

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\beta_1 \cdot s(t) \cdot i(t) - \beta_2 \cdot s(t) \cdot a(t) \\ \frac{da(t)}{dt} = \beta_2 \cdot s(t) \cdot a(t) - \alpha_1 \cdot a(t) \cdot i(t) - \alpha_2 \cdot a(t) \cdot r(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = \beta_1 \cdot s(t) \cdot i(t) - \gamma \cdot i(t) + \alpha_1 \cdot a(t) \cdot i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = \gamma \cdot i(t) + \alpha_2 \cdot a(t) \cdot r(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中，参数  $\beta_1$  是易感者对于确诊的感染率， $\beta_2$  是

易感者对无症状感染者的感染率， $\alpha_1$  是无症状病例对于确诊的转化率， $\alpha_2$  是无症状病例对于康复的转化率， $\gamma$  是确诊患者的康复率。

## 2.2 数据

本文选取的是国家卫健委官网公布的 2021 年 7 月 12 日-2021 年 8 月 21 日的数据，共 41 组数据[9]（见附录表格）。这些数据包括每日新增确诊病例数，现有确诊病例数；新增疑似病例数，现有疑似病例数；新增无症状感染者数，现有无症状感染者数；无症状感染者转化成确诊病例数，无症状感染者转化成移除（即恢复健康）人数。还有每日治愈病人数，累积治愈病人数；死亡人数和累积死亡病人数，由于这一段时间每天死亡病例是 0，所以实际死亡数据都没有变化。此外，由于疑似病例数每天最多 1-2 个，一般就是 0，数量太少且没有明显的转化，我们的模型将不予考虑。死亡数是 0，也不予考虑。我们将主要考虑三种：确诊病例，无症状感染者，治愈病例。各病例数见如下图 2。

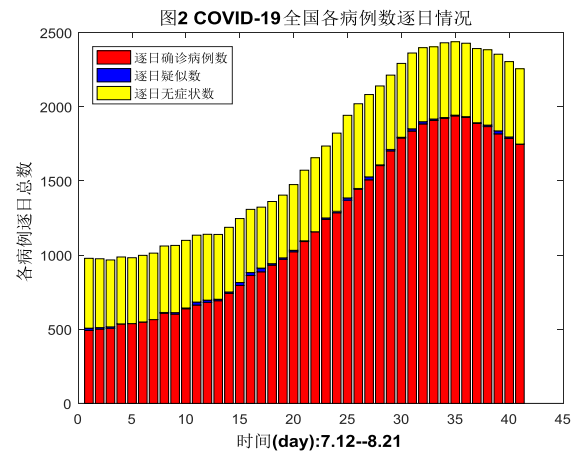


图 2 各病例逐日数量情况

图 2 说明：最下的红色柱状条，表示的是确诊病例数；中间的蓝色柱状条，表示的是疑似病例数；最上面的黄色柱状条，表示的是无症状感染者数。容易看到，各种病例总数是一个先缓慢上升，到峰值后再下降的趋势。

## 2.3 参数估计

设每个病人每天有效接触的健康者平均人数是常数  $R_0$ ，称为基本再生数。当病人与健康者有效接触时，使健康者受感染变为病人的感染率为  $\beta_1$ ，则

$$R_0 = \frac{\beta_1 \cdot S(0)}{\gamma} \approx \frac{\beta_1}{\gamma} \cdot \frac{1}{T}, \text{ 这里, } T \text{ 是治愈病人的平均治疗天数, } \gamma \text{ 是康复率。}$$

有了这些参数的计算公式和意义后, 可以进行模型的参数计算。本文选取的这一段数据, 数据量足够, 并且, 这一段时期的疫情传播和病例的治疗都是比较稳定的。需要说明的是, 国外的情况与我们国内是不同的, 由此得出参数值也是有区别的。当然, 数学模型不同, 也会导致计算的参数值不同的。文章参数值估计, 是拟合计算所得数据, 拟合数据是用最小二乘法计算得出的。图 3 是 2021 年 7 月 12 日到 8 月 21 日逐日新增数据。

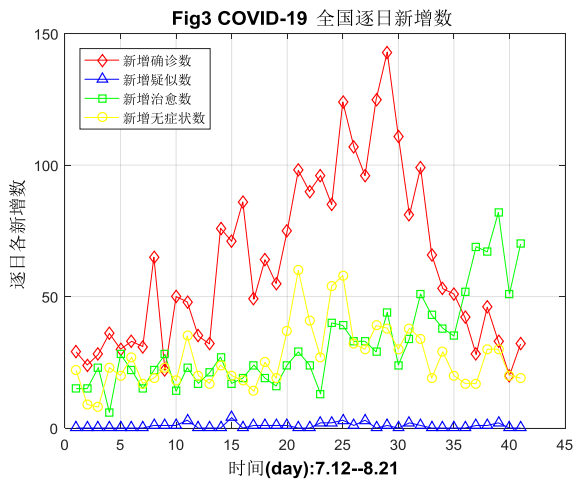


图 3 各病例的逐日新增数。

图 3 说明: 上面的红色菱形, 表示的是逐日新增确诊病例数; 黄色的圆形, 表示的是逐日新增无症状病例数; 绿色的方块, 表示的是新增治愈病例数; 最下面的蓝色三角形, 表示的是新增疑似病例数。显然可以看到, 确诊病例数和无症状病例数都是首先缓慢上升, 到峰值后下降的趋势。不过, 它们各自到达峰值的时间是不同的。

本文使用的计算软件是 MATLAB, 版本是 7.0。经过拟合计算, 算得各参数值[10]如下表 1:

表 1 参数的数值与来源

参数	$R_0$	$\gamma$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
计算值	5.97	0.067	0.40	0.37	0.19	0.40
来源	公式	公式	拟合	拟合	拟合	拟合

注: *Delta* 病例的平均治愈时间是 15 天, 而原始毒株的治愈时间[10, 8]是 9 天多。

由表 1 这些参数进行 MATLAB 动态模拟过程, 如

下图 4:

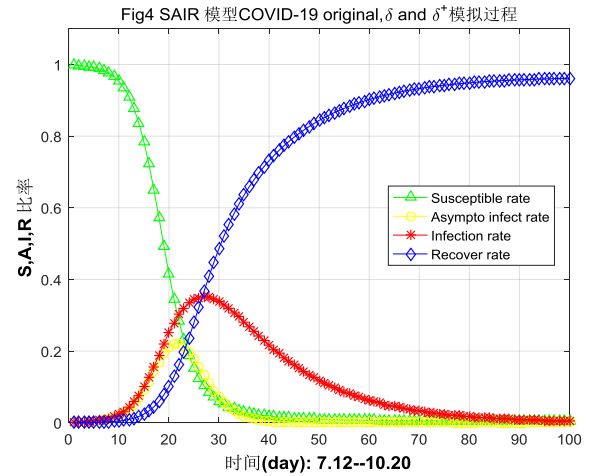


图 4 SAIR 模型的各病例比例发展情况

图 4 说明: 绿色的三角形, 表示的是易感人群 (健康者) 的比率变化过程; 红色的星型表示的是感染者 (确诊病例) 的比率变化过程; 黄色的圆形, 表示的是无症状感染者的比率变化过程; 蓝色的菱形, 表示的是移除者 (康复) 的比率变化过程。

从图 4 容易看到, 从初始值 (2021 年 7 月 12 日) 开始, 大约 28 天多以后, 确诊感染率达到最高峰, 最高感染比率达到 0.3498; 类似的, 从初始值开始, 大约 22 天多以后, 无症状感染率达到最高峰, 最高感染比率达到 0.220。这个结果与图 3 的数据是一致的, 符合的比较好的。

比较文章[8], 新冠病毒 COVID-19 的原始毒株的有关参数如下表 2, 为:

表 2 参数的数值和来源

参数	$R_0$	$\gamma$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
计算值	3.77	0.1	0.377	0.41	0.15	0.40
来源	公式	公式	拟合	拟合	拟合	拟合

比较表 1 和表 2 的参数值, 容易看到, 新的三种毒株混合类的传染性, 从  $R_0$  来看, 比原始毒株的要强 58.88%; 从直接传染率  $\beta_1$  来看, 比原始毒株的要强 6.1%。由此可见, 变异毒株 *Delta* 和 *Delta*<sup>+</sup> 比原始毒株的传染性要强很多, 确实需要各国政府和人们引起充分的重视和警惕! 世卫组织标记它们为 VOC 是必要的, 也是应该的。

## 2.4 模型的误差

数学模型的数据和实际病例数据的误差是免不了的, 下图 5 是真实确诊病例数和模型数据及其误差的图示:



Fig5 确诊数,模型数据及其误差范围

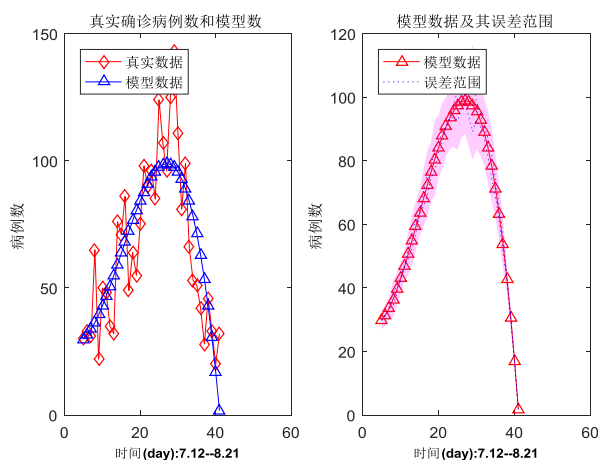


图 5 确诊病例数和模拟数及误差

图 5 说明：左图上的红色菱形，表示的是真实的逐日新增确诊病例数；蓝色的三角形，表示的是数学模型的数据。右图上的红色三角形，表示的是数学模型的确诊病例数；粉红色的区域范围，表示的是数学模型与真实值的误差（即标准差）。

下面图 6 继续给出无症状感染者的真实病例数和模型数据，及其误差如图示。

Fig6 无症状数,模型数据及其误差范围

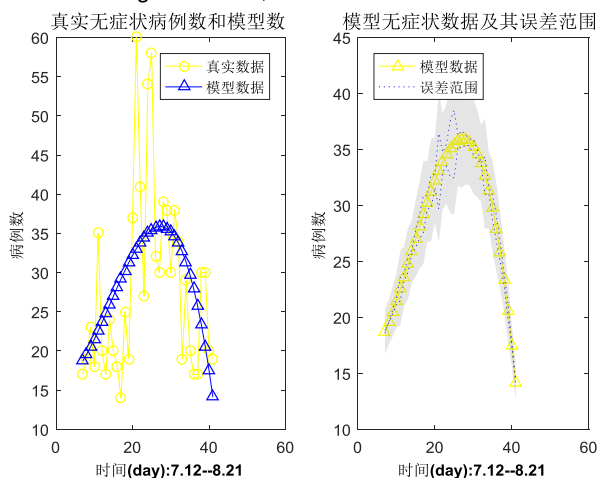


图 6 无症状病例数和模拟数及误差

图 6 说明：左图上的黄色圆形，表示的是真实的逐日新增无症状病例数；蓝色的三角形，表示的是数学模型的数据。右图上的黄色三角形，表示的是数学模型的无症状病例数；淡灰色的区域范围，表示的是数学模型与真实值的误差（即标准差）。

## 2.5 基于模型的预测

根据前面真实数据与数学模型数据的误差，我们在对后面确诊病例数和无症状感染者数进行预测，预测[11, 12]将取近期（8 月 18 日-21 日共四天）误差的平均值作为以后预测的误差。

下面图 7 是从 8 月 19 日开始，对以后时间（每天）的确诊病例数进行预测。其中，红色三角形是模型[13-15]预测数据，粉红色区域是预测的误差范围。从近期的国家卫健委的通报数据来看，我们的模型预测是比较准确的，效果是好的。

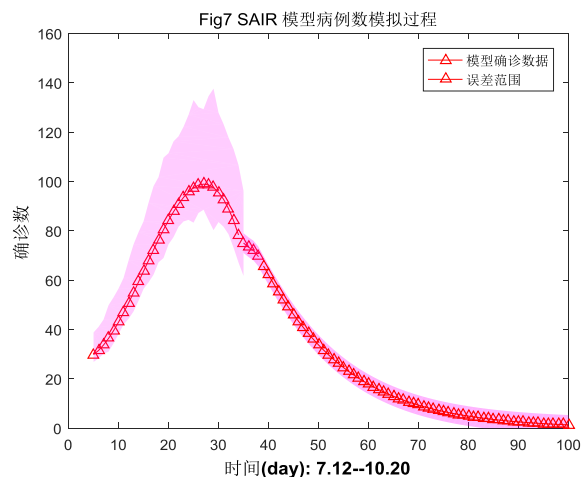


图 7 模型预测确诊病例数与误差。

同样的，下面的图 8 是从 8 月 19 日开始，对以后时间（每天）的无症状病例数进行预测。其中，黄色三角形是模型预测数据，灰色区域是预测的误差范围。同样，从近期的国家卫健委的通报无症状感染者数据来看，模型预测是比较准确的。

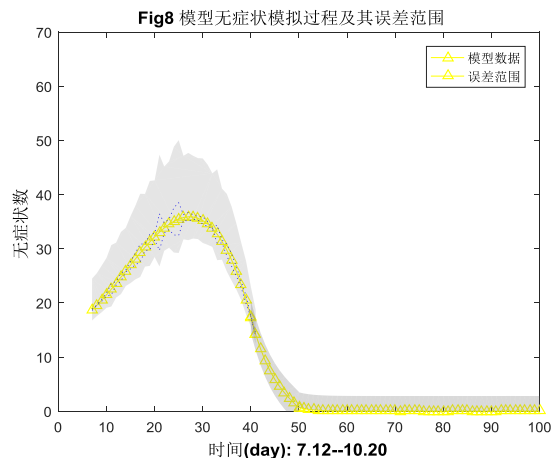


图 8 模型预测的无症状病例数与误差。

### 3 控制措施的效果

全世界经过新冠病毒 COVID-19 的近两年的肆虐，已经总结了很多有效措施，可以减少，或者降低病毒的威胁。比如，减少外出活动的频率和时间，非必要不外出；外出时戴口罩，保持社交距离；尽量不聚集，减小聚集的人员密度；勤洗手勤开窗通风；打疫苗增强自身对病毒的抵抗力，研发新药；公共活动场经常消毒等等。这些措施可以大大降低感染率。

下面，我们讨论采取控制措施以后，控制的效果。根据 SAIR 模型，原来参数值见表 1。现在假设治愈的时间不变，还是 15 天，则参数  $\gamma$  值不变。不妨假设疫情开始以后，病毒开始按照以前的参数进行传播，10 天以后，采取了严格控制措施以后，传染率下降了，即参数  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_1$  变小了（见表 3），我们看看动态模拟[8, 15]的效果，如下图 9 所示。

表 3 参数值（改变数值后）

参数	$R_0$	$\gamma$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
计算值	2.985	0.067	0.20	0.15	0.10	0.40
来源	公式	公式	设定	设定	设定	不变

从上面表 3 容易看到，采取控制措施后，传染率都变小了， $\beta_1$  从 0.4 变到 0.2； $\beta_2$  从 0.37 变到 0.15； $\alpha_1$  从 0.19 变到 0.10；根据公式， $R_0$  从 5.97 变到 2.985。 $\alpha_2$ ,  $\gamma$  都没有改变。

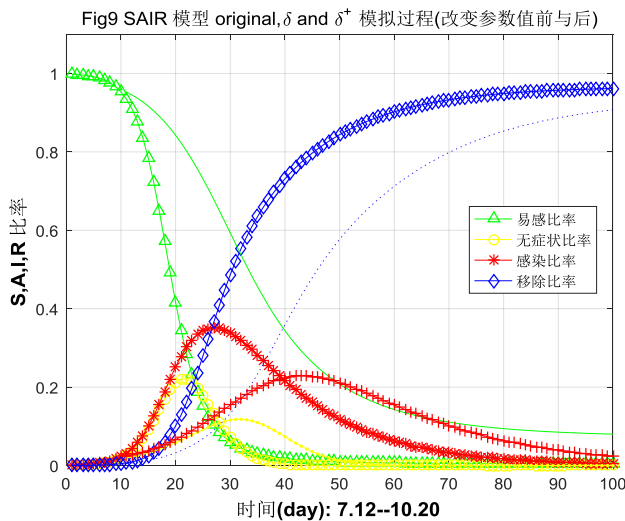


图 9 防疫措施（改变参数值）的效果

从上面图 9 的模拟过程容易看到，疫情开始 10 天以后，由于采取了严格的控制措施，病毒的三项

参数的传染率下降。对易感人群（健康者）来说，绿色实线对比绿色三角形的比率下降的速度明显减缓了；对感染人群（生病者）来说，改变参数值后红色+对比改变前的红色\*的感染比率的高峰显然降低了，改变参数前的最高感染比率高达 0.3498，而改变参数后的最高感染比率只有 0.228，应对疫情的难度显然降低了。而且，感染最高峰到来的时间也大大延后了。因为，改变前的参数显示，从开始大约 28 天以后就到达感染的最高峰，而改变后的参数显示，从开始大约 44 天以后才到达感染的最高峰。高峰推迟了到来，为充分的应对准备赢得了时间；对无症状感染者来说，参数的变小，从黄色的圆形变成黄色的实线。同样，感染的最高峰值从 0.22 变成 0.16，变小了。最高峰到来的时间，也从第 22 天变成第 33 天，最高峰到来的时间推迟了。总之，传染率参数降下来以后，对抗疫胜利确实是一个重大的利好因素。

### 4 结论

通过前面的动态模拟，可以看到，SAIR 模型对于新冠病毒 COVID-19 的传播过程的模拟是有效的、准确的、可靠的[16-20]。特别地，模型对于病毒传播的时间特征很准确，准确的模拟了确诊病例感染高峰到来时间，以及无症状感染高峰到来时间。

SAIR 模型也明白地告诉大家，需要警惕无症状感染者的数量风险，由于无症状感染者是“静默的病毒传播者”。2021 年的 7 月到 8 月，这期间无症状感染者人数基本保持每天 400 多人，潜伏期一般 3-6 天，就有一部分转化成确诊病例。无症状感染者本身就具有传染性，转化成确诊病例后，传染性更大。从图 8 和图 9 容易看到，依照目前的参数，大约 50 天后无症状感染者的数量才会达到个位数的状态，到一个相对安全的数量。

这个数学模型也有进一步改进的价值，比如，这里的参数都是常数，而实际情况的传染参数更适合是一个时间函数。比如，从图 7 容易看到，实际的确诊病例数据与模型的数据各个不同时期的误差是不同，有时不同时间的误差的差别还不小。图 8 的无症状感染者数据也体现了这个问题，这是一个值得以后改进的地方。

此外，如果有了专门的 Delta 病例数据，就可以更进一步的研究 Delta 的传播模型特性，这是以后要做的工作。

## 参考文献

- [1] 崔恒建, 胡涛. 新型冠状病毒肺炎疫情预测预报的非线性回归方法 [J]. 中国科学: 数学, 2020, 50: 1-12.
- [2] 郑丽晖, 陈建宝, 陈晓平. 新型冠状病毒传播的统计建模与风险预测 [J]. 应用数学学报, 2020, 43: 324-334.
- [3] 张仲华, 张靖茹, 刘叶玲. 一类具有两种控制策略的 SIR 非连续传染病模型动力学研究 [J]. 应用数学学报, 2020, 43: 897-914.
- [4] Tian B C, Yuan R. Traveling waves for a diffusive SEIR epidemic model with standard incidences [J]. *Science China Mathematics*, 2017, 60: 813-832.
- [5] Chen D X, Yang Y F, Zhang Y F, Yu W W. Prediction of COVID-19 spread by sliding mSEIR observer. *Science China Information Sciences* 2020; accepted.doi: 10.1007/s11432-020-3034-y.
- [6] Simone A D, Piangerelli M. A bayesian approach for monitoring epidemics in presence of undetected cases [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020; accepted. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110167>.
- [7] Altan A, Karasu S, Bekiros S. Digital currency forecasting with chaotic meta-heuristic bio-inspired signal processing techniques [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, 126: 325-336.
- [8] Liu Y, Tang X Q. COVID-19: Is it safe now? Study of asymptomatic infection spread and quantity risk based on SAIR model [J]. *Chaos, Solitons and Fractals* X, 2021, 6: 1-6.
- [9] 中华人民共和国卫生健康委. 新冠病毒肺炎疫情最新情况 [EB/OL]. [2021-08-21]. <http://www.nhc.gov.cn/xcs/yqtb/202108/871a5f07abea4a81b21de629d4ce271e.shtml>
- [10] World Health Organization. Coronavirus disease (COVID-2019) situation reports-28 [EB/OL]. [2020-02-18]. <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/situation-reports>
- [11] Tang X Q, Liu N Z, Wang H X, Bai Y Q. A class of new two-variable chromatic polynomials [J]. *J. Lanzhou University (Natural Sciences)*, 2012, 48: 106-112.
- [12] Tang X Q, Liu N Z, Wang H X, Bai Y Q. The two-variable chromatic polynomial of regular tree study [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2013, 36: 761-768.
- [13] Tang X Q. New expected value expansions of rooted graphs [J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 2015, 31: 81-88.
- [14] Tang X Q, Wang H X. Stepwise confidence interval method for finding drug's minimum effective dose in trial [J]. *Drug Evaluation Research*, 2010, 33: 58-62.
- [15] Tang X Q, Bai Y Q, Liu N Z, Liu Y. Markowitz portfolio model based on random matrix theory [J]. *J. Shanghai University (Natural Science)*, 2013, 19: 293-297.
- [16] Liu N Z, Tang X Q, Wang H X. On reliability of two probability in regular q-tree rooted graph [J]. *J. Southwest China Normal University (Natural Science Edition)*, 2013, 38: 24-27.
- [17] Liu Y, Tang X Q. Comparison of some classes of two-variable chromatic polynomials [J]. *Journal of Natural Science of Hunan Normal University*, 2014, 37: 67-72.
- [18] Liu Y, Tang X Q. Reliability study of regular rooted q-tree [J]. *J. Northeast Normal University*, 2015, 47: 17-21.
- [19] Tang X Q, Liu Y and Liu N Z. Reliability and stability study of rooted net [J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2017, 34: 65-71.
- [20] Tang X Q, Wang B. On stability of rooted graph and its optimality [J]. *J. Southwest China Normal University (Natural Science Edition)*, 2017, 42: 14-19.