

# 离散时间切换系统 $L_2$ 增益与驻留时间关系分析



张钟允, 王世杰, 刘丽娟\*

大连交通大学自动化与电气工程学院, 辽宁大连 116028

**摘要:** 本文主要研究离散时间切换系统在驻留时间 (DT) 切换条件下  $l_2$  增益控制器的设计问题。到目前为止, 系统  $l_2$  增益稳定性与驻留时间的定量关系是切换系统领域中尚未解决的问题之一。不同于以往的研究结果, 本文首次提出一种新的驻留时间依赖 Lyapunov 函数 (DTDLF) 得到更低保守性稳定性判据。此 Lyapunov 函数的创新之处在于它的构建不再是传统两步控制器设计法, 而是将控制器和切换规律这两个设计任务合并在一个框架中, 其中求解线性矩阵不等式 (LMIs) 只涉及一个步骤。与两步设计方案相比, 此方法大大简化了设计过程。采用驻留时间依赖 Lyapunov 函数和驻留时间切换策略, 设计了一种驻留时间依赖 (DTD)  $H_\infty$  控制器, 使系统具有全局一致渐近稳定 (GUAS) 性质, 保证了  $H_\infty$  的性能指标。最后, 通过一个数值算例来验证所得结果的有效性, 经过仿真实验证实了所提出的设计方法能够保证更短的驻留时间界和较小的误差结果。

**关键词:**  $l_2$  增益; 驻留时间依赖李雅普诺夫函数;  $H_\infty$  控制器; 离散时间; 切换系统

**DOI:** [10.57237/j.se.2023.03.002](https://doi.org/10.57237/j.se.2023.03.002)

## Analysis of the Relation Between $L_2$ Gain and Dwell Time in Discrete Time Switching System

Zhang Zhongyun, Wang Shijie, Liu Lijuan\*

School of Electric Engineering and Automation, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China

**Abstract:** This paper focuses on the design of  $l_2$  gain controller for discrete time switching systems with dwell time (DT) switching. So far, the quantitative relationship between  $l_2$  gain stability and dwell time is one of the unsolved problems in the field of switching systems. Different from previous studies, a novel dwell time dependent Lyapunov function (DTDLF) is proposed in this paper for the first time to obtain a less conservative stability criterion. The innovation of this Lyapunov function lies in that it is no longer built by the traditional two-step controller design method, but combines the two design tasks of controller and switching law into one framework, in which solving linear matrix inequalities (LMIs) involves only one step. Compared with the two-step design scheme, this method greatly simplifies the design process. Based on the resident time dependent Lyapunov function and the resident time switching strategy, a dwell time dependent (DTD)  $H_\infty$  controller is designed such that the system is globally uniformly asymptotically stable (GUAS) and has a guaranteed  $H_\infty$  performance index. Finally, a numerical example is given to verify the validity of the proposed

基金项目: 国家自然科学基金《基于切换正线性时滞系统模型的交通信号调流有限时间控制研究》(61803066);  
辽宁省教育厅科学研究项目《切换正系统稳定性研究及其在交通信号中的应用》(JDL2019009).

\*通信作者: 刘丽娟, [misliu06@163.com](mailto:misliu06@163.com)

收稿日期: 2023-04-26; 接受日期: 2023-05-23; 在线出版日期: 2023-06-15

<http://www.sciandeng.com>

design method. The simulation results show that the proposed design method can guarantee a shorter resident time limit and a smaller error result.

**Keywords:**  $l_2$  Gain; New Dwell Time Dependent Lyapunov Function;  $H_\infty$  Control; Discrete Time; Switching System

## 1 引言

切换系统是一种特殊的混合系统, 由微分或差分方程描述的几个子系统和协调这些子系统之间的切换顺序的切换规则组成。由于切换系统在理论发展和实际应用中具有重要意义, 在[1-7]中得到了广泛的研究。例如, 在[8]中, 引入了一种新的参数切换混沌系统, 并给出了相应的图像加密变换。[9]研究了随机扰动 T-S 模糊切换系统的模型逼近问题。在[10]中, 还考虑了涉及可稳定和不稳定子系统的交换系统的鲁棒有限时间控制问题。而连续时间动力学和离散时间动力学之间的相互作用则是混杂系统的一个特征, 考虑了混杂系统动力学的建模和稳定性理论。

切换系统已经成为一个重要的类别, 代表了当前控制系统领域的一个相对较新的和非常活跃的研究领域。一般来说, 稳定性分析是切换系统领域的主要问题, 通过约束开关定律通过驻留时间 (或平均驻留时间), 结合多李雅普诺夫函数 (MLF) 技术和停留时间方法是一种有效的方法处理稳定性问题交换系统[11], 其中一个基本问题是计算最小允许驻留时间保证渐近稳定性。另一方面, 输入-输出性能分析仍然是切换系统面临的一个严重挑战。在本文中, 我们关注增益性能意义上的干扰增益性能。一旦在驻留时间上获得较小的界, 我们就可以有选择地在驻留时间性能较差的系统性能上做出改进, 以提高系统的整体性能。然而, 到目前为止, 关于这类问题的报道结果很少。

由于工程应用的实际需要, 往往要求控制系统具有鲁棒性的性能。这意味着该系统必须对外部的不确定性具有鲁棒稳定性。众所周知,  $H_\infty$  控制是研究鲁棒控制的最重要的方法。在[12]中讨论了具有模式依赖平均驻留时间和异步切换的离散时间交换系统的  $H_\infty$  控制问题。在[13]中, 研究了具有马尔可夫切换参数的不确定时滞系统的鲁棒  $H_\infty$  控制。然后, [14]研究了具有时变延迟的切换系统的  $H_\infty$  控制器合成问题。 $l_2$  增益的概念是  $H_\infty$  控制的本质。在过去的几十年里, 切换系统的  $l_2$  增益分析普遍采用[15]方法。利用一种新的线性矩阵不等式, 给出了离散切换系统在最小驻留时间切换信

号下的  $l_2$  增益条件。在离散时域[15]中, 还研究了平均驻留时间切换系统的  $l_2$  增益分析结果。在[18]中研究了有限时间  $l_2$  增益线性切换系统的特性。然后在[19]中得到了具有指数稳定性的开关延迟系统的加权  $l_2$  增益结果。在[20]中, 利用模式依赖平均驻留时间方法分析了一类切换线性系统的加权  $H_\infty$  性能。[21]中作者通过  $H_\infty$  控制综合研究了具有时变时滞的随机非线性系统的鲁棒控制问题。

在本文中, 我们将推导出具有驻留时间约束切换系统的稳定性和  $l_2$  增益性能的凸集条件建立系统模型。受摘要[16, 17]中定时李雅普诺夫函数技术的启发, 将其扩展到离散时间情况, 引入了一种新的李雅普诺夫函数二次结构, 确定一类与驻留时间相关的时变对称正定矩阵  $P_i(k)$ , 称为驻留时间依赖李雅普诺夫函数 (DTDLF)。本文方法的一个重要特点是, 求出的 LMIs 条件在子系统矩阵中都是凸集的, 这使得推广它非常方便, 例如对于有不确定性的情况。值得注意的是, 驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法涵盖了切换李雅普诺夫函数 (SLF) 和公共李雅普诺夫函数 (CLF) 方法涉及任意切换, 换言之, 驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法可以被视为切换李雅普诺夫函数和公共李雅普诺夫函数的扩展, 从任意切换到驻留时间限制切换。此外, 将驻留时间模式依赖李雅普诺夫函数思想应用到  $H_\infty$  控制综合问题中, 驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法的一个明显优点是将控制器设计和切换规律设计结合成一个统一的设计步骤, 显著地促进了控制综合过程。

本文结构第 2 节介绍了以前的结果和新提出的驻留时间依赖函数时变矩阵。我们在第 3 节中提出了基于驻留时间依赖李雅普诺夫函数切换系统的稳定性和  $l_2$  增益分析问题的解决方案, 根据已有的结论做出改进。将理论进行应用, 在第 4 节中研究了状态反馈控制器的统一设计程序。在第 5 节中给出了数值算例。结论见第 6 节。

符号说明  $A > 0 (A \geq 0)$  是指一个实对称的正定 (半

正定) 矩阵的。  $\mathbb{R}^n$  和  $\mathbb{R}$  分别表示  $n$  维欧几里得空间和实数集。  $A^T$  表示矩阵  $A$  的转置,  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数。此外, 在对称正定矩阵中, 我们使用  $*$  作为由对称引入的项的省略号。  $I$  代表具有适当维度的单位矩阵。

## 2 预备知识

### 2.1 离散线性切换系统

考虑如下离散时间线性切换系统

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + E_{\sigma(k)}u(k) + G_{\sigma(k)}\omega(k) \quad (1)$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + F_{\sigma(k)}u(k) + H_{\sigma(k)}\omega(k) \quad (2)$$

其中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  是系统状态变量;  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  是控制信号输入;  $\omega(k) \in \mathbb{R}^w$  是扰动输入, 而且还满足  $l_2 \in [0, +\infty)$ ;  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  是系统的输出;  $\sigma(k)$  是切换信号, 被定义为一个关于  $k$  的分段连续 (从右开始) 函数, 也可以表示为外部逻辑规则。切换序列  $k_0, \dots, k_w, \dots$  是未知的优先序列, 但是当检测到切换信号输入时切换序列会立刻做出响应。子系统  $\sigma(k_w)$  在  $[k_w, k_{w+1})$  时间段内发生变化。

本文中的切换信号规则是基于模式依赖驻留时间方法下进行切换。在推导出主要结论之前, 给出如下定义:

定义 1 [14] 切换系统(1)-(2)在  $\omega(k) \equiv 0$  条件下, 给定切换信号且初始条件为  $x(k_0)$  情况下是全局一致渐近稳定(GUAS)的, 存在一类  $\kappa_\infty$  函数  $\kappa$  使得切换系统(1)-(2)满足不等式  $\|x(k)\| \leq \kappa(\|x(k_0)\|)$  其中  $\forall k \in \mathbb{Z} \geq k_0$ , 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\|x(k)\| \rightarrow 0$ 。

可以看出, 定义 1 只提供了切换系统稳定性的标准, 没有任何系统性能。为了进一步说明系统性能, 需要以下两个定义作进一步说明。

定义 2 [16] 对于  $\gamma > 0$ , 系统(1)-(2)在初始条件为零的条件下具有  $l_2$  增益性质的全局一致渐近稳定且满足  $\|y\|_{l_2[0, T]} \leq \gamma \|\omega\|_{l_2[0, T]}$ , 其中  $\omega \in l_2[0, T]$ ,  $0 \leq T \leq \infty$ 。

定义 3 [19] 当  $\gamma > 0$  时, 系统(1)-(2)在初始条件为零的条件下具有  $l_2$  增益性质的全局一致渐近稳定且满足

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} y^T(k)y(k) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) \quad (3)$$

其中  $\omega(k) \in l_2[0, \infty)$ 。

### 2.2 驻留时间依赖 Lyapunov 函数

多重李雅普诺夫函数 (MLF) 表达式为

$V_i(k) = x^T(k)P_i(k)x(k)$   $i \in M$  是一种很成熟的分析切换系统稳定性的工具[9], 特别是应用在驻留时间限制条件[14]或者基于平均驻留时间条件[15]下的慢切换系统。然而, 由于现有技术的壁垒, 多重李亚普诺夫函数在稳定性分析和  $l_2$  增益分析方面都有明显的缺陷。

应对连续时间切换系统鲁棒稳定性问题[16, 17]提出了定时李雅普诺夫函数方法解决方案。基于驻留时间进行切换, 定时李雅普诺夫函数特点是随时间变化呈现线性分段变化, 最后趋于稳定。定时李雅普诺夫函数[16, 17]的优点在于可以用 LMIs 作为凸条件推导出连续时间线性切换系统渐近稳定的充分条件。因此, 受定时方法的启发, 并将其应用于离散时间的情况下, 引入了一种新的李亚普诺夫函数结构, 称为驻留时间依赖李亚普诺夫函数方法。对于驻留时间  $d$  的研究, 驻留时间依赖李亚普诺夫函数表达式为  $V_i(k, x(k)) = x^T(k)P_i(k)x(k)$  其中驻留时间依赖矩阵  $P_i(k) > 0$ ,  $i \in M$  满足

$$V_i(k, x(k)) = x^T(k)P_i(k)x(k), i \in M \quad (4)$$

$$P_i(k) = \begin{cases} P_{i,e} & k \in [k_w, k_w + d) \\ P_{i,d} & k \in [k_w + d, k_{w+1}) \end{cases}, i \in M \quad (5)$$

其中  $P_{i,e} > 0$ ,  $e = 0, 1, \dots, d$ ,  $\forall i \in M$ 。其对应的驻留时间依赖李雅普诺夫函数 (5) 可以构造为

$$V_i(k) = \begin{cases} x^T(k)P_{i,e}x(k) \\ x^T(k)P_{i,d}x(k) \end{cases}, i \in M \quad (6)$$

与传统的由一组常数矩阵  $P_i$ ,  $i \in M$  构造的多重李雅普诺夫函数相比, 时变矩阵  $P_i(k)$  将驻留时间考虑进去, 更加详细地判断切换时间段发生的变化。

## 3 主要结果

### 3.1 模式依赖驻留时间稳定性分析

本章节讨论模式依赖驻留时间切换条件下的稳定性。

考虑以下离散时间线性切换系统:

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + G_{\sigma(k)}\omega(k) \quad (7)$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}x(k) + H_{\sigma(k)}\omega(k) \quad (8)$$

在驻留时间切换条件限制下, 关于公式(7)和(8)在  $\omega(k) \equiv 0$  条件下切换系统的稳定性分析已经发表出很多重要的结论。判断切换系统(7)和(8)稳定性的充分条件

在[18]和[20]中得到充分证明。

引理 1 [18]考虑离散时间切换系统(7)-(8)在  $\omega(k)=0$  条件下, 存在标量  $d>0$ , 正定对称矩阵  $P_i>0, \forall i \in M$ , 满足

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0, \forall i \in M \quad (9)$$

$$(A_i^d)^T P_j A_i^d - P_i < 0, i \neq j, \forall i, j \in M \quad (10)$$

则系统是全局一致渐近稳定的。

引理 2 [20]考虑离散时间切换系统(7)-(8)在  $\omega(k)=0$  条件下, 存在标量  $0<\beta<1, \mu\geq 1, d>0$ , 正定对称矩阵  $P_i>0, \forall i \in M$ , 满足

$$A_i^T P_i A_i - P_i + \beta P_i < 0, \forall i \in M \quad (11)$$

$$P_i \leq \mu P_j, i \neq j, \forall i, j \in M \quad (12)$$

$$d > -\ln \mu / \ln(1 - \beta) \quad (13)$$

则系统是全局一致渐近稳定的。

引理 1 和引理 2 得到广泛的应用, 但是结合实际应用发现还是有不足之处, 没有利用切换规则信息, 而且从本质来说都是非线性非凸的, 所以很难将其应用到实际中, 引理 4.2 中需要先预定参数  $\beta$  和  $\mu$ , 选择参数时需要进行大量数值算例分析进行筛选, 这样会消耗大量人力、物力, 选择不合理的  $\beta$  和  $\mu$  容易导致保守性较大的结论。本文提出的驻留时间依赖李亚普诺夫函数方法不仅利用切换信息规则, 并且所得的充分条件不需要预先设定任何参数, 通过求解 LMIs 即可。所以, 基于离散驻留时间依赖李雅普诺夫函数(6), 可以得出基于 LMIs 的离散时间线性系统(7)-(8)全局一致渐近稳定的充分条件。

定理 1 考虑离散线性切换系统(7)-(8)在  $\omega(k)=0$  条件下, 存在标量  $d>0$ , 正定对称矩阵  $P_{i,e}>0$ , 使得以下条件成立

$$A_i^T P_{i,e+1} A_i - P_{i,e} < 0, \forall i \in M \quad (14)$$

$$A_i^T P_{i,d} A_i - P_{i,d} < 0, \forall i \in M \quad (15)$$

$$P_{j,0} - P_{i,d} \leq 0, i \neq j, \forall i, j \in M \quad (16)$$

那么系统是全局一致渐近稳定的。

证明选择公式(4)为备选函数, 其中  $P_i(k)$  由公式(5)所定义。对于离散时间切换系统(7), 取李雅普诺夫函数如下

$$V(k) = \sum_{i \in M} \tau_i(k) V_i(k, x(k)) \quad (17)$$

其中

$$\tau_i(k) = \begin{cases} 0 & \sigma(k) = i \\ 1 & \sigma(k) \neq i \end{cases} \quad (18)$$

令

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \quad (19)$$

并由公式(6)构造可得

$$\Delta V(k) = \begin{cases} x^T(k)(A_i^T P_{i,e+1} A_i - P_{i,e})x(k) \\ x^T(k)(A_i^T P_{i,d} A_i - P_{i,d})x(k) \end{cases} \quad (20)$$

由(14)和(15)可得

$$\Delta V(k) < 0 \quad k \in [k_w, k_{w+1}) \quad (21)$$

公式(21)说明函数  $V(k)$  的能量在子系统在切换时间内是减小的。然后, 我们必须证明函数  $V(k)$  的值在每个切换时刻  $k_w$  处也是递减的。假设系统(7)在切换时刻  $k_w$  从子系统  $i$  切换到子系统  $j$ , 通过(16)可以得到

$$V^+(k_w) - V^-(k_w) \leq 0, \quad \forall k_w \quad (22)$$

其中  $V^+(k_w) = V_j(k_w)$ ,  $V^-(k_w) = V_i(k_w)$ ,  $i \neq j$ ,  $\forall i, j \in M$ 。

结合公式(21)和(22)可以看到函数  $V(k)$  在切换时刻发生变化能量也是减小的。且当  $k \rightarrow \infty$  时有  $V(k) \rightarrow 0$ , 由标准的李亚普诺夫函数定理[20]可知, 系统(4)是全局一致渐近稳定的。证毕。

注 1 定理 1 提供了一种保证系统(7)-(8)渐近稳定前提下确定最小驻留时间的方法, 可以由下列式子表示

$$d^* = \min_{d>0} \{d : (13-15) \text{ hold}\} \quad (23)$$

注 2 由于驻留时间依赖李雅普诺夫函数本质上是定时的, 此方法可以理解为[16, 17]成果基础上从连续时间到离散时间的扩展。连续时间线性切换[16, 17]条件下, 所得结果的保守性与驻留时间区间  $[t_n, t_{n+1})$  的平均划分段数有关。具体案例[16]示例 1 中容易发现划分段数越大, 意味着区间  $[t_n, t_{n+1})$  划分越细, 所得的结果保守性会越低。然而, 在离散时间的情况下, 定理 1 不需要对  $[k_w, k_{w+1})$  进行预划分, 在驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法的框架中总是会得到最小保守的结果, 这是本文的重要创新点。



3.2 小节开始研究  $l_2$  增益性能与驻留时间的关系。以下结果与常数  $l_2$  增益性能有关, 即解决在[20]中提出的开放问题。

### 3.2 $L_2$ 增益性能分析

公式 (1)和 (2)是离散时间切换线性系统基础表达式, 本文需要将驻留时间依赖李雅普诺夫函数结合 (1)和 (2)写出新的离散时间切换系统的表达式

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}(k)x(k) + E_{\sigma(k)}(k)u(k) + G_{\sigma(k)}(k)\omega(k) \quad (24)$$

$$y(k) = C_{\sigma(k)}(k)x(k) + F_{\sigma(k)}(k)u(k) + H_{\sigma(k)}(k)\omega(k) \quad (25)$$

其中,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  为系统状态变量,  $\omega(k) \in \mathbb{R}^m$  为扰动输入,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$  为系统输出。  $\sigma(k): \mathbb{Z}^+ \rightarrow N = \{1, 2, \dots, M\}$  被称为切换律或切换信号,  $M$  是子系统的数量。

对于任意切换规则条件下, 驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法涵盖了切换李雅普诺夫方法和公共李雅普诺夫方法, 当  $d=1$  或  $d \rightarrow 0$  时, 驻留时间李雅普诺夫方法就是切换李雅普诺夫方法或公共李雅普诺夫函数方法。当  $d>1$  时, 驻留时间依赖李雅普诺夫函数方法是切换李雅普诺夫函数方法和公共李雅普诺夫函数方法在驻留时间约束下的扩展。

根据切换系统(1)和(2)设计模式依赖状态反馈控制器

$$u(k) = K_i x(k) \quad (26)$$

公式(26)说明不同的系统模式具有不同的控制器增益。首先需要确定主系统模式, 进一步使用相应的控制器增益。

通过采用控制器(26), 闭环控制系统可以写成

$$x(k+1) = \bar{A}_i x(k) + H_i \omega(k) \quad (27)$$

$$y(k) = \bar{C}_i x(k) + G_i \omega(k) \quad (28)$$

$$\bar{A}_i = A_i + E_i K_i \quad (29)$$

$$\bar{C}_i = C_i + F_i K_i \quad (30)$$

引理 3 [15]对给定的对称矩阵  $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$ , 以下三个条件是等价的

$$Q < 0; \quad (31)$$

$$Q_{11} < 0, Q_{22} - Q_{12}^T Q_{11}^{-1} Q_{12} < 0; \quad (32)$$

$$Q_{22} < 0, Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{12}^T < 0 \quad (33)$$

引理 4 [16]考虑线性切换系统(27)-(28), 给定常数  $\gamma > 0, 0 < \alpha < 1, \mu > 1$ 。假设存在一组正定对称矩阵  $P_i, \forall i \in M$  满足下列不等式

$$\begin{pmatrix} -P_i & 0 & P_i \bar{A}_i & P_i G_i \\ * & -I & \bar{C}_i & H_i \\ * & * & -(1-\alpha)P_i & 0 \\ * & * & * & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \quad (34)$$

对于任意的  $(\sigma k_w \Rightarrow i, \sigma k_w + 1 = j)$ , 其中  $i, j \in M \times M, i \neq j$  存在

$$P_i - \mu P_j < 0 \quad (35)$$

因此, 切换线性系统(27)-(28)是全局一致渐近稳定的, 在任何模式依赖平均驻留时间切换信号下都有一个  $l_2$  增益性能指数  $\gamma$ , 满足

$$\tau_p \geq -\ln \mu / \ln(1-\alpha) \quad (36)$$

引理 3 的方法得到了广泛的应用, 但还是存在不足之处, 需要准确  $\mu$  和  $\alpha$  的值, 否则会造成最终结果保守性过大。结合提出的驻留时间依赖李雅普诺夫函数将引理 3 作进一步的改进, 得到定理 2。

定理 2 给定标量  $d>0, \gamma>0$ , 如果存在对称正定矩阵  $P_i(k)>0, i \in M$ , 那么下列不等式成立。

$$\begin{pmatrix} -P_{i,e} & 0 & P_{i,e+1} \bar{A}_i & \bar{C}_i \\ * & -\gamma^2 I & P_{i,e+1} G_i & H_i \\ * & * & -P_{i,e+1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} -P_{i,d} & 0 & P_{i,d} \bar{A}_i & \bar{C}_i \\ * & -\gamma^2 I & P_{i,d} G_i & H_i \\ * & * & -P_{i,d} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (38)$$

$$P_{j,0} - P_{i,d} \leq 0, i \neq j, \forall i, j \in M \quad (39)$$

证明首先, 考虑  $\omega \equiv 0$  的情况, 利用本文公示(6)提出的驻留时间依赖函数, 结合不等式(37)-(38), 当  $k \in [k_w, k_w+d), \forall i \in M$ , 令

$$\Delta V_i(k, x(k)) = V_i(k+1, (k+1)) - V_i(k, (k)) \quad (40)$$

我们可以得

$$\begin{aligned} \Delta V_i(k, x(k)) &= x^T(k+1)P_i(k+1)x(k+1) \\ &\quad - x^T(k)P_i(k)x(k) \\ &= (\bar{A}x(k))^T P_i(k+1)\bar{A}x(k) \\ &\quad - x^T(k)P_i(k)x(k) \\ &= x^T(k)[\bar{A}^T P_i(k+1)\bar{A} - P_i(k)]x(k) \end{aligned}$$

接下来证明(39),

$$V_{i+1}(k, x(k)) - V_i(k, x(k)) = x^T(k)[P_{j,0} - P_{i,d}]x(k)$$

根据(21)-(22)得到

$$\bar{A}^T P_i(k+1)\bar{A} - P_i(k) < 0 \quad (41)$$

$$P_{j,0} - P_{i,d} < 0 \quad (42)$$

切换系统(27)-(28)在(41)-(42)条件下是全局一致渐近稳定的。根据引理 3 以及不等式(37)-(38)可得

$$\zeta_i \triangleq \begin{pmatrix} -P_i(k) & P_i(k+1)\bar{A} \\ * & -P_i(k+1) \end{pmatrix} < 0 \quad (43)$$

因此, 在  $\omega(k) \equiv 0$  条件下, (37)-(39)是全局一致渐近稳定的。

接下来考虑本文重点, 当  $\omega \neq 0$  时, 设  $J = \sum_{k=0}^{\infty} [y^T(k)y(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k)]$ , 注意, 当初始时间  $k_0=0$ , 初始状态  $x(0)=0$  时, 构造李雅普诺夫函数(17), 由(40)可得

$$\begin{aligned} \Delta V(k, x(k)) + y^T(k)y(k) \\ - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) \\ &= x^T(k)[\bar{A}^T P_i(k+1)\bar{A} \\ &\quad - P_i(k) + \bar{C}_i^T \bar{C}_i]x(k) \\ &\quad + 2x^T(k)[\bar{A}^T P_i(k+1)G_i \\ &\quad + \bar{C}_i H_i]\omega(k) \\ &\quad + \omega^T(k)[G_i^T P_i(k+1)G_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i] \\ &\quad + \omega^T(k)[F_i^T F_i - \gamma^2 I]\omega(k) \\ &= \zeta^T(k)\Theta\zeta(k) \end{aligned} \quad (44)$$

其中  $\zeta(k) \triangleq [x^T(k) \ \omega^T(k)]^T$ ,

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Omega & \bar{A}^T P_i(k+1)G_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i \\ * & G_i^T P_i(k+1)G_i + \bar{C}_i^T \bar{C}_i - \gamma^2 I \end{pmatrix} \quad (45)$$

其中  $\Omega = \bar{A}^T P_i(k+1)\bar{A} - P_i(k) + \bar{C}_i^T \bar{C}_i$

根据引理 3, (37)-(38)可以写成

$$\begin{pmatrix} -P_i(k) & 0 & P_i(k+1)\bar{A} \\ * & -\gamma^2 I & P_i(k+1)G_i \\ * & * & -P_i(k+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \\ H_i^T \\ 0 \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \\ H_i^T \\ 0 \end{pmatrix}^T < 0 \quad (46)$$

再次用到引理 3, (46)可以写成

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T P_i(k+1)\bar{A} - P_i(k) & \bar{A}^T P_i(k+1)G_i \\ * & G_i^T P_i(k+1)G_i - \gamma^2 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \\ H_i^T \end{pmatrix} I^{-1} \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \\ H_i^T \end{pmatrix}^T < 0 \quad (47)$$

可以发现(45)与(47)相等, 即  $\Theta < 0$ 。因为(44)是标准的二次型, 因此我们可以得到

$$\Delta V(k, x(k)) + y^T(k)y(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) < 0 \quad (48)$$

定理 2 保证了  $L_2$  增益性能规定要求。

此外, 基于驻留时间依赖李雅普诺夫函数的充分条件在本质上是凸集的, 许多其他现有的标准技术可以很容易地应用到此方法的框架中。因此, 该方法不仅得到了保证稳定性和抗扰动问题的结果, 而且为驻留时间约束的切换离散时间系统提供了一个通用的凸优化工具。

## 4 $H_\infty$ 控制器设计

切换系统的控制综合问题主要涉及控制器和切换规律的设计。根据之前的驻留时间的结果, 如引理 1 和 2, 由于它们本质上是非线性非凸的, 大多数控制综合程序必须通过两个单独的步骤来执行

在本文中, 受驻留时间李雅普诺夫函数思想的启发, 我们将制定驻留时间依赖结构的控制器, 这样通过一个统一的步骤就可以得到控制器和切换规律, 明确地促进了控制综合过程。

假设系统与相应控制器之间的切换是同步的, 我们对给出的状态反馈控制器为

$$u(k) = K_{\sigma(k)}(k)x(k) \quad (49)$$

$$K_i(k) = \begin{cases} K_{i,e} & k \in [k_w, k_w + d) \\ K_{i,d} & k \in [k_w + d, k_{w+1}) \end{cases} \quad (50)$$

$K_i(k)$  为控制器增益矩阵。

定理 3 考虑离散时间切换线性系统(24)-(25), 存在标量  $\gamma > 0$ ,  $d > 0$ , 如果存在一类对称的正定矩阵

$X_{i,l}, S_{i,l} > 0, l = 0, 1, \dots, d, i \in M$  使得下列不等式成立

$$\begin{pmatrix} -S_{i,e} & 0 & A_i S_{i,e} + E_i X_{i,e} & C_i S_{i,e} + F_i X_{i,e} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,e+1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (51)$$

其中  $e = 0, 1, \dots, d-1, \forall i \in M$

$$\begin{pmatrix} -S_{i,d} & 0 & A_i S_{i,d} + E_i X_{i,d} & C_i S_{i,d} + F_i X_{i,d} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,d} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (52)$$

$$\begin{pmatrix} -S_{i,d} & S_{i,d} \\ * & -S_{j,0} \end{pmatrix} \leq 0 \quad (53)$$

其中  $i \neq j, \forall i, j \in M$

闭环控制系统(24)-(25)条件下驻留时间依赖控制器(49)-(50)具有驻留时间  $l_2$  增益  $\gamma$  性质的增益矩阵表达式如下:

$$K_i(k) = \begin{cases} X_{i,e} S_{i,e}^{-1} & k \in [k_w, k_w + d) \\ X_{i,d} S_{i,d}^{-1} & k \in [k_w + d, k_w + 1) \end{cases} \quad (54)$$

证明对公式(54)进行转换, 改写成  $X_{i,l} = K_{i,l} S_{i,l}, l = 0, 1, \dots, d, i \in M$ , 定义

$$S_i(k) = \begin{cases} P_{i,e}^{-1} & e = k - k_w, k \in [k_w, k_w + d) \\ P_{i,d}^{-1} & k \in [k_w + d, k_w + 1) \end{cases} \quad (55)$$

对公式 (37)两边同时前乘和后乘  $\text{diag}\{S_{i,e}, I, S_{i,e+1}, I\}$  得到

$$\begin{pmatrix} -S_{i,e} & 0 & \bar{A}_i S_{i,e} & \bar{C}_i S_{i,e} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,e+1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \quad (56)$$

公式 (38)两边同时前乘和后乘  $\text{diag}\{S_{i,d}, I, S_{i,d}, I\}$ , 可得

$$\begin{pmatrix} -S_{i,d} & 0 & \bar{A}_i S_{i,d} & \bar{C}_i S_{i,d} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,d} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \quad (57)$$

根据公式(29)-(30), (56)和(57)可以写成

$$\begin{pmatrix} -S_{i,e} & 0 & (A_i + E_i K_{i,e}) S_{i,e} & (C_i S_{i,e} + F_i K_{i,e}) S_{i,e} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,e+1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix} -S_{i,d} & 0 & (A_i + E_i K_{i,d}) S_{i,d} & (C_i + F_i K_{i,d}) S_{i,d} \\ * & -\gamma^2 I & G_i & H_i \\ * & * & -S_{i,d} & 0 \\ * & * & * & -I \end{pmatrix} \quad (59)$$

公式(54)可知,  $X_i(k) = K_i(k) S_i(k)$ , 将此公式带入(58)-(59), 即可得到(51)-(52)。另外, 公式(39)可以推导出(53)成立。因此切换系统是全局一直渐近稳定的。

定理 3 为我们提供了一种设计  $H_\infty$  控制器的一步设计方法, 将控制器的增益和驻留时间包含在统一的概念, 即与驻留时间相关的增益(50)。根据特定的驻留时间获得控制器增益, 换句话说, 同时确定控制器增益和驻留时间。因此, 将控制器和切换规律两个设计任务合并为一个设计步骤, 最后通过 LMIs 求解得到结果。与两步设计方案相比, 它明显地简化了设计过程。

## 5 数值算例

本节给出了一个具体的切换离散时间线性系统矩阵如下

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.94 & -1.03 \\ -0.11 & 0.06 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 1.31 \\ -1.10 \end{bmatrix},$$

$$C_1^T = \begin{bmatrix} -1.42 \\ 0.26 \end{bmatrix}, F_1 = 0.55, G_1 = \begin{bmatrix} -1.1 \\ 2.04 \end{bmatrix}, H_1 = 1.06$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.53 & 0.75 \\ 0.35 & -0.47 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.79 \\ -1.06 \end{bmatrix}$$

$$C_2^T = \begin{bmatrix} -0.95 \\ 1.26 \end{bmatrix}, F_2 = 0.34, G_2 = \begin{bmatrix} 0.69 \\ -0.53 \end{bmatrix}, H_2 = 0.64$$

关于上述离散时间线性切换系统的稳定性、 $l_2$  增益与驻留时间的关系和在  $H_\infty$  控制器优化分析如下。

### 5.1 稳定性分析

考虑到上述具有输入  $u(k)=0$  和扰动  $\omega(k)=0$  的系统,

本文工作重点是计算出系统稳定性条件下的最小驻留时间。在稳定性分析方面，采用了具有驻留时间依赖李雅普诺夫函数思想的定理 1 确定系统(7)-(8)是全局一致渐近稳定的。根据(23)，利用 LMIs 求解方法，最小允许驻留时间可以计算得  $d^*=2$ 。最小允许驻留时间  $d^*=2$  是驻留时间依赖李雅普诺夫函数框架中保守性最低的唯一值。最小驻留时间  $d^*=2$  表示，除了任意切换外，上述切换系统规律对允许有驻留时间约束条件的切换系统均适用。

5.2  $L_2$  增益性能分析

在  $l_2$  增益分析问题中，本文重点关注计算  $l_2$  增益  $\gamma$  对驻留时间  $d$  的影响。我们的目标是在每个特定的驻留时间下找到  $l_2$  增益的最小值。在展示最新结果之前，[20]已经知道了以下两个观察结果：

离散时间切换系统的  $l_2$  增益  $\gamma$  的最小值随着驻留时间  $d$  的增加而单调减小。

$l_2$  增益的最小值是通过  $\gamma^* = \sup_{i \in M} \{\gamma_i\}$  计算出的下确界，其中  $\gamma_i$  是第  $i$  子系统中  $l_2$  增益的最小值。在本例中，通过 LMIs 求解可以计算出其下确界是  $\max\{\gamma_1, \gamma_2\}=10.5675$ 。

$l_2$  增益  $\gamma$  与驻留时间  $d$  之间的单调关系如图 1 所示。

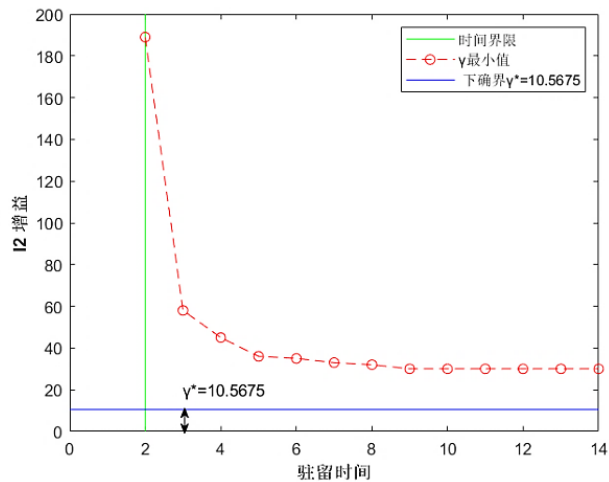


图 1  $l_2$  增益与驻留时间  $d$  关系图

图 1 中的结果清楚地描述了  $l_2$  增益  $\gamma$  与驻留时间  $d$  之间的关系。首先，当驻留时间处于  $d \leq 2$  时，优化问题是不可行的。然后，在  $d \geq 2$  之后， $l_2$  增益  $\gamma$  随着驻留时间  $d$  的增加而单调减小，最后接近下确界  $\gamma^*=10.5675$  趋于稳定。这与 5.1 小节求出的  $d^*=2$  相对应，再次说明结果的准确性。

5.3  $H_\infty$  控制器

在状态反馈控制器 (49) 优化作用下，可发现显著改善扰动  $\omega(k)$  的衰减性能，通过定理 3 利用 LMI 方法将不同驻留时间下的最小增益  $\gamma$  求解，从而解决优化问题。所得结果如图 2 所示。

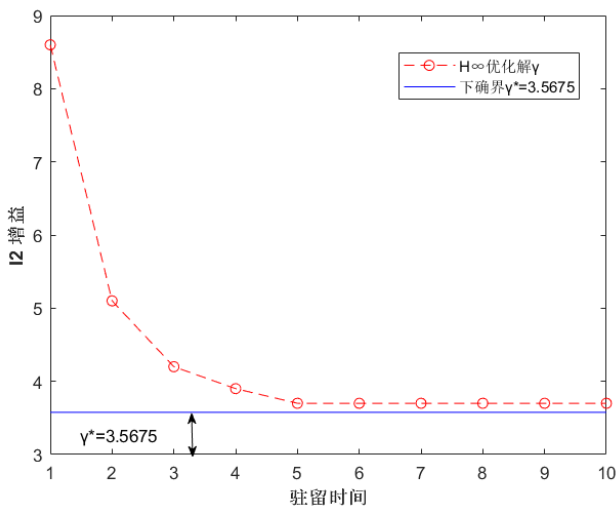


图 2  $H_\infty$  优化解  $\gamma$  与驻留时间  $d$  的关系图

首先，观察图 2 可以清楚地观察到通过  $H_\infty$  最优化之后，下确界  $\gamma^*$  优化到 3.5675，与 5.2 小节得到的  $\gamma^*=10.5675$  相比减少了 70%。说明控制器设计的完善性。与图 1 相比，每个驻留时间的最优  $H_\infty$  性能水平都显著降低，这意味着  $H_\infty$  性能有了很大的提高。

驻留时间依赖控制器的优点是控制器增益与驻留时间有关，这意味着控制器和允许最小驻留时间由一个统一的步骤同时确定。选择一个特定的驻留时间  $d=4$  为例，一旦确定了  $d=4$ ，驻留时间依赖控制增益矩阵  $K_i(k)$ ,  $i=1, 2$  可以定义为

$$K_i(k) = \begin{cases} K_{i,e} & e = k - k_w, \quad k \in [k_w, k_w + 4) \\ K_{i,4} & k \in [k_w + 4, k_w + 1) \end{cases} \quad (60)$$

其中控制增益矩阵  $K_{i,e}$ ,  $e=0, 1, 2, 3, 4$ ,  $i=1, 2$  的值可以在表 1 中查询。

表 1 驻留时间依赖控制器增益  $K_{i,e}$

$K_{i,e}$	$i=1$	$i=2$
$e=0$	[0.4632 -0.0285]	[-0.9015 0.6854]
$e=1$	[0.4494 -0.0275]	[-0.8863 0.6722]
$e=2$	[0.4136 -0.1133]	[-0.7653 0.5865]
$e=3$	[0.3317 -0.1385]	[-0.4985 0.3575]
$e=4$	[0.3274 -0.1421]	[-0.3025 0.2145]



## 6 结论

在驻留时间约束下, 利用 LMI 方法来进行稳定性分析, 并进一步研究了  $l_2$  增益与驻留时间之间的关系。这些条件是基于驻留时间李雅普诺夫函数方法推导出的。由于导出条件的凸性质的优点, 其结果可以很容易地推广到更多切换系统中。然后, 作为一个应用, 提出了一种针对  $H_\infty$  控制问题的统一方法。最后, 通过数值算例说明了本文论文中的计算结果。由于本文提出的方法简单, 为切换系统提供了一种求凸集的工具, 研究结果应广泛应用于具有驻留时间限制的时变切换系统, 如对具有时变时滞约束条件的切换系统的扩展, 在今后的工作中需要进一步考虑。

## 参考文献

- [1] D. Liberzon, Switching in Systems and Control. Boston [M]. MA, USA: Birkhauser, 2003.
- [2] H. Lin and P. J. Antsaklis, Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, Feb 2009, vol. 54, no. 2, pp. 308–322.
- [3] Y. Li and S. Tong, Fuzzy adaptive control design strategy of nonlinear switched large-scale systems [J]. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., Syst.*, doi: 10.1109/TSMC.2017.2703127.
- [4] Wu, Z., Shi, P., Su, H., Chu, J.: Delay-dependent stability analysis for switched neural networks with time-varying delay [J] *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, 2011, pp. 1522–1530.
- [5] Sun, Z., Ge, S.: Switched linear systems: control and design [M]. (Springer-Verlag, London, UK, 2005).
- [6] Liu LJ, Zhao X, Sun XM and Zong G, Stability and  $l_2$ -gain analysis of discrete-time switched systems with mode-dependent average dwell time [J]. *IEEE Transactions on Systems*, 2020, Vol. 50 (6): 2305-2314.
- [7] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi, and M. Liu, “Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, Jul. 2012, vol. 57, no. 7, pp. 1809–1815.
- [8] Y. Zhou, L. Bao, and C. L. P. Chen, Image encryption using a new parametric switching chaotic system [J]. *Signal Process*, 2013, vol. 93, no. 11, pp. 3039–3052.
- [9] X. Su, L. Wu, P. Shi, and C. L. P. Chen, Model approximation for fuzzy switched systems with stochastic perturbation [J]. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, Oct. 2015, vol. 23, no. 5, pp. 1458–1473.
- [10] M. S. Branicky, Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, Apr. 1998, vol. 43, no. 4, pp. 475–482.
- [11] Lee, J. W., Dullerud, G. E.: Uniformly stabilizing sets of switching sequences for switched linear systems [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2007, 52, pp. 868–874.
- [12] C. Briat, Stability analysis and stabilization of stochastic linear impulsive, switched and sampled-data systems under dwell-time constraints [J]. *Automatica*, Dec. 2016, vol. 74, pp. 279–287.
- [13] 肖建, 张友刚, 线性系统理论 [M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2011.
- [14] 李宏峰, 混杂自动机理论在城市交通信号控制中的应用 [D]. 北京: 北京工业大学博士学位论文, 2011.
- [15] 张生瑞, 交通流理论与方法 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 2010.
- [16] Allerhand, L. I., Shaked, U.: Robust stability and stabilization of linear switched systems with dwell time [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2011, 56, pp. 381–386.
- [17] Allerhand, L. I., Shaked, U.: Robust state-dependent switching of linear systems with dwell time [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2013, 58 pp. 994–1001.
- [18] Zhai, G., Hu, B., Yasuda, K., Michel, A. N.: Disturbance attenuation properties of time-controlled switched systems [J]. *Franklin Inst.*, 2001, 338, pp. 765–779.
- [19] L. Zhang and P. Shi,  $l_2$ – $l_\infty$  model reduction for switched LPV systems with average dwell time [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, Nov. 2008, vol. 53, no. 10, pp. 2443–2448.
- [20] X. Zhao, P. Shi, Y. Yin, and S. K. Nguang, New results on stability of slowly switched systems: A multiple discontinuous Lyapunov function approach [J]. *IEEE Trans. Autom. Control*, Jul 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3502–3509.
- [21] Cai, C.: Dwell-time approach to input-output stability properties for a class of discrete-time dynamical systems [J] *Syst. Control Lett.*, 2011, 60, pp. 383–389.