Vol. 2, No. 4 Science and Engineering August, 2023
第 2 卷第 4 期 科学与工程 2023 年 8 月

切换时滞系统的稳定性研究

王世杰 [1]，张钟允 [1]，周瑞琪 [2]，刘丽娟 [3,*]

[1] 大连交通大学自动化与电气工程学院，辽宁大连 116028
[2] 大连交通大学理学院，辽宁大连 116028
[3] 大连交通大学软件学院，辽宁大连 116028

摘要：切换时滞系统是一类具有多模态特性的系统模型，具有重要的理论研究价值。本文使用李亚普诺夫函数法和模型依赖平均驻留时间方法（MDADT）研究了非线性和线性切换时滞系统的指数稳定性问题。将模型依赖平均驻留时间方案引入切换时滞系统，基于模型依赖平均驻留时间设计，以线性矩阵不等式（LMIs）的形式给出了指数稳定的充分条件。切换系统中可以含有不稳定子系统。利用稳定的子系统和不稳定的子系统被激活总时间比，给出了保证系统指数稳定的充分条件。随后对于一类特殊的切换时滞系统，通过求解线性矩阵不等式（LMIs）和某些方程，可以分别得到使系统保持指数稳定所需要的模型依赖平均驻留时间（MDADT）的下界及子系统之间被激活的时间比率。并给出了系统的状态指数衰减的具体形式。证明了在任意切换的条件下，切换闭环系统中的所有信号最终有界，同时每个子系统输出都能在一个小的有界误差范围内跟踪上相应的目标轨迹。最后通过数值算例和 MATLAB 仿真说明了该方法的有效性。

关键词：模型依赖平均驻留时间；切换时滞系统；指数稳定性；李亚普诺夫函数；线性矩阵不等式（LMI）

DOI: 10.57237/j.se.2023.04.001

Stability of Switching Time Delay Systems

Wang Shijie[1], Zhang Zhongyun[1], Zhou Ruiqi[2], Liu Lijuan[3,*]

[1]School of Electric Engineering and Automation, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China
[2]School of Mathematics, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China
[3]School of Software, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China

Abstract: Switched systems, as a kind of system models with multi-modal characteristics, Therefore, switched systems have important theoretical research value. In this paper, Lyapunov function and model dependent average dwell time method (MDADT) is used to study the exponential stability of nonlinear and linear switched time delay systems. The mode dependent average dwell time scheme is introduced into the system with switched time delay. Based on the mode dependent average dwell time design, the sufficient conditions for exponential stability are given in the form of linear matrix inequalities (LMIs). Exponential stability for switched delay systems consisting of stable and unstable subsystems is addressed. Under the condition that activation time ratio between stable subsystems and unstable ones is not less than a specified constant, sufficient conditions are given to guarantee exponential stability of the switched delay systems. Subsequently, for a special class of switched delay systems, a lower bound on the mode dependent average dwell time and the activation time ratio of subsystems are calculated respectively by solving a set

基金项目：辽宁省自然科学基金计划面上项目（2022-MS-341）.

*通信作者：刘丽娟, misliu06@163.com

收稿日期: 2023-05-05；接受日期: 2023-06-25；在线出版日期: 2023-08-29 http://www.sciandeng.com

of linear matrix inequalities (LMIs) and certain equations. The concrete form of state exponential decay of the system is given. It is proved that under the condition of arbitrary switching, all the signals in the switched closed loop system are finally bounded, each subsystem output can track the corresponding target trajectory within a small bounded error range. Finally, the effectiveness of the proposed method is demonstrated by numerical examples and MATLAB simulation.

Keywords: Mode Dependent Mean Dwell Time; Switched Delay Systems; Exponential Stability; Lyapunov Function; Linear Matrix Inequality (LMI)

1 引言

时滞现象在现实工程中是普遍存在的，例如通讯网络系统、化学过程系统、电力系统等。由于时滞经常是不稳定的来源，并且时滞现象通常影响系统的稳定性，使系统的性能变差[1]。当切换系统带有时滞时，系统的分析和控制设计都会变得更为复杂[2]。具有时滞的若干子系统所构成的切换系统被称为切换时滞系统，这是一种全新类型的系统，经常出现在 Nakagami-fading 系统[3]、网络控制系统[4]等的建模中。目前，关于切换时滞系统的结果不多[5, 6]。尽管如此，这样的系统却更能准确地描述实际的工程系统，所以研究切换时滞系统具有更重要的理论意义和实际价值。包括李亚普诺夫泛函方法[7-12]和 Lyapunov-Razumikhin [12-14]在内的李亚普诺夫方法仍然是主要方法。

切换系统是一个混合系统，由一个几个用微分或差分方程描述的子系统和一个协调这些子系统之间切换的切换规则组成[16]。在切换系统领域，稳定性问题一直是研究的热点[15]。对于没有时滞的切换系统，模型依赖平均驻留时间技术是一个重要的方法。因此这种技术被认为是分析切换时滞系统稳定性的更理想和更可取的方法。然而，据我们所知，到目前为结果不多。

本文研究切换时滞系统的指数稳定性分析问题。通过模型依赖平均驻留时间法和李亚普诺夫函数法给出了保证切换时滞系统指数稳定的充分条件。对于一类切换时滞系统，模型依赖平均驻留时间的一个下界可以通过求解一些线性矩阵不等式（LMIs）问题显式地计算出。此外，状态衰变估计也很容易获得。

至今还没有比较理想的结果。另外，在一些实际应用中，渐近稳定性并不能满足工程要求，相应的，具有一定衰减度的指数稳定性更能符合工程的需要。

符号说明：首先我们给出本文需要用到的一些基础知识：R^+表示所有大于或者等于 0 的实数；In 表示 n 维全同矩阵；$\lambda\min(\cdot)(\lambda\max)$ 表示矩阵“$\cdot$”的最小或者最大特征值；对于给定的 $\tau\geq 0$，$C_n=([-\tau,0],R^n)$ 表示从 $([-\tau,0],R^n)$ 映射到 R^n 的具有一致收敛拓扑的连续函数的 Banach 空间，$x_t\in C_n$ 可由 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta\in[-\tau,0]$ 定义；$\|x(t)\|$ 通常表示 2-范数和下式：

$\|x_t\|=\sup\limits_{-\tau\leq\theta\leq 0}\{V(t+\theta,x(t+\theta))\}$；$V:R_+\times R^n\to R_+$ 为一个连续函数；$\bar{V}(t,x(t))$ 被定义为 $\bar{V}(t,x(t))=\sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]}\{V(t+\theta,x(t+\theta))\}$，$D^+V(t,x(t))=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[V(t+h,x(t+h))-V(t,x(t))]$，$t\geq t_0$ 并且为了方便起见，我们设 $V(t)=V(t,x(t))$，$\bar{V}(t)=\bar{V}(t,x(t))$。

2 问题描述

2.1 切换时滞系统

首先考虑一类如下形式的切换时滞系统：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f_{\sigma(t)}(t,x_t)\\ x_{t_0}(\theta)=\varphi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^n$ 是系统状态，$\sigma:[0,+\infty)\to M=\{1,2,\cdots,m\}$ 是一个分段常数函数，它取决于时间 t 或状态 $x(t)$，$\varphi(\theta)\in C_n$ 是向量值初始条件，对于任意的 $p\in M$，$f_p:R_+\times C_n\to R_+$ 是连续且足够光滑的；我们假设 t 取任何值条件下保证 $f_p(t,0)\equiv 0$ 说明 $x^*=0$ 是系统(1)的一个平衡点。关于切换信号 σ，

我们有切换序列如下：$\Sigma=\{x_{t_0};(i_0,t_0),(i_1,t_1),\cdots,$

$(i_k,t_k),\cdots,|\,i_k\in M,k\in N\}$ 当 $t\in[t_{k,}t_{k+1})$ 时，说明第 i_k 个子系统是活跃的。我们假设切换系统(1)的系统状态在切换时刻处于稳定即轨迹 $x(t)$ 处处连续。

定义 1 [17]：如果系统(1)的解 $x(t_0,\phi)(t)$ 通过任意的 $(t_0,\phi)\in R_+\times C_n$ 且满足下式：

$$\|x(t_0,\phi)(t)\|\le\Gamma\|x_{t_0}\|e^{-\gamma(t-t_0)},\quad\forall t\ge t_0$$

则系统(1)的平衡点 $x^*=0$ 被称为是全局指数稳定，其中 $\Gamma\ge1$ 和 $\gamma>0$ 是常数。在满足这些条件的情况下，我们可以认为系统(1)是全局指数稳定的。

定义 2 [18]：对于一个切换信号 $\sigma(t)$ 和任意的 $T\ge t\ge0$，$N_{\sigma p}(T,t)$ 是切换数字，第 p 个子系统在区间 $[t,T]$ 上被激活，$T_p(T,t)$ 表示第 p 个子系统在 $[t,T]$ 这个区间上的运行时间，$p\in S$。如果存在正数 N_{0p} 和 τ_{ap} 使得下式成立：

$$N_{\sigma p}(T,t)\le N_{0p}+\frac{T_p(T,t)}{\tau_{ap}},\forall T\ge t\ge0$$

那么我们可以说 $\sigma(t)$ 有一个模型依赖平均驻留时间 τ_{ap}。

当 $M=1$ 时，切换时滞系统(1)简化为普通的时滞系统如下：

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=f(t,x_t)\\ x_{t_0}(\theta)=\varphi(\theta),\theta\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{2}$$

引理 1 [13]：设 $V:[-\tau,+\infty)\times R^n\to R_+$ 是一个连续函数，沿着系统(2)的解通过任意 $(t_0,\phi)\in R_+\times C_n$，我们有：

$$\bar{V}(t)\le\bar{V}(t_0)e^{-\gamma(t-\tau-t_0)},\forall t\ge t_0$$

当且仅当 $D^+V(t)\le-\gamma V(t)$ 时，无论何时，我们都有：

$$\begin{aligned}&\bar{V}(t)\le V(t)e^{\gamma\tau}\\&V(t)=\bar{V}(t_0)e^{-\gamma(t-t_0)}\end{aligned}\tag{3}$$

证明：它是[13]中定理 1 的直接结果。

2.2 主要结果

定理 1：对于任意的 $p\in M$，设：

$$V_p:[-\tau,+\infty)\times R^n\to R_+$$

为连续函数，假设存在正常数 a、b、$\gamma_p>0$ 和 $\mu_p\ge1$ 使得以下条件成立：

$$a\|x(t)\|^2\le V_p(x),\bar{V}_p(x(t_0))\le b\|x_{t_0}\|^2\tag{4}$$

$$D^+V_p(t)\le-\gamma_pV_p(t)$$

其中 $\forall x\in R^n,\forall p\in M$ 无论何时都有：

$$\begin{aligned}&\bar{V}_p(t)\le V_p(t)e^{\gamma_p\tau},\\&V_p(t)=\bar{V}_p(t_0)e^{-\gamma_p(t-t_0)}\end{aligned}\tag{5}$$

$$V_p(x)\le\mu_pV_q(x),\forall x\in R^n,\forall p,q\in M\tag{6}$$

则切换时滞系统(1)对于模型依赖平均驻留时间

$$\mathrm{T}_{ap}\ge T_{ap}^*=\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{\gamma_p}$$

的每个切换信号 σ 是全局指数稳定的，并且状态衰减估计由下式给出：

$$\|x(t)\|\le\sqrt{\frac{be^{\gamma_p\tau}}{a}}\|x_{t_0}\|e^{-\frac{1}{2}(\gamma_p-\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)}\tag{7}$$

证明：对于 $t\in[t_{k,}t_{k+1})$，由引理 1 考虑(4)式和(5)式得出：

$$\bar{V}_{\sigma(t)}(t)\le\bar{V}_{\sigma}(t_k)e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)}$$

由(6)式得：

$$\bar{V}_{\sigma(t_k)}(t_k)\le\mu_p\bar{V}_{\sigma(t_{\bar{k}})}(t_{\bar{k}})$$

则：

$$\bar{V}_{\sigma(t)}(t)\le\mu_p\bar{V}_{\sigma(t_{\bar{k}})}(t_{\bar{k}})e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)}$$

对于区间 $[t_{k-1},t_k)$ 有：

$$\bar{V}_{\sigma(t_{\bar{k}})}\le\bar{V}_{\sigma(t_{k-1})}e^{-\gamma_p(t_k-\tau-t_{k-1})}$$

由定义 2 得：

$$
\begin{aligned}
\bar{V}_{\sigma(t)}(t) &\le \mu_p \bar{V}_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-) e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)} \\
&\le \mu_p \bar{V}_{\sigma(t_{k-1})}(t_{k-1}) e^{-\gamma_p(t_k-\tau-t_{k-1})} e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)} \\
&\le \mu_p^2 \bar{V}_{\sigma(t_{k-1}^-)}(t_{k-1}^-) e^{-\gamma_p(t-2\tau-t_{k-1})} \\
&\le \mu_p^2 \bar{V}_{\sigma(t_{k-2})}(t_{k-2}) e^{-\gamma_p(t_{k-1}-\tau-t_{k-2})} e^{-\gamma_p(t-2\tau-t_{k-1})} \\
&\le \mu_p^3 \bar{V}_{\sigma(t_{k-2}^-)}(t_{k-2}^-) e^{-\gamma_p(t-3\tau-t_{k-2})} \\
&\vdots \\
&\le \mu_p^k \bar{V}_{\sigma(t_1^-)}(t_1^-) e^{-\gamma_p(t-k\tau-t_1)} \\
&\le \mu_p^k \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{\gamma_p k\tau} e^{-\gamma_p(t-\tau-t_0)} \\
&\le \mu_p^{\frac{t-t_0}{T_{ap}}} e^{\frac{\gamma_p\tau(t-t_0)}{T_{ap}}} e^{-\gamma_p(t-\tau-t_0)} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) \\
&= e^{-(\gamma_p-\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} e^{\gamma_p\tau} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0)
\end{aligned}
$$

由定义 1 得：

$$
\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &\le \frac{1}{a} V_{\sigma(t)}(t) \le \frac{1}{a}\bar{V}_{\sigma(t)}(t) \\
&\le \frac{1}{a} e^{-(\gamma_p-\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} e^{\gamma_p\tau} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) \\
&\le \frac{b}{a} e^{-(\gamma_p-\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} e^{\gamma_p\tau} \|x_{t_0}\|^2
\end{aligned}
$$

这直接可以推导出(7)式，则：

$$\gamma_p > \frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}}$$

时，即模型依赖平均驻留时间满足：

$$\mathrm{T}_{ap} > \mathrm{T}^*_{ap} = \frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{\gamma_p}$$

成立时，则系统(1)是全局指数稳定的。

2.3 具有特殊结构的切换时滞系统

考虑具有特殊结构的切换时滞系统描述如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}(t)x(t) + F_{\sigma(t)}(t,x_t) \\ x_{t_0} = \varphi(\theta), \theta\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{8}$$

对于 $\forall p\in M$，$A_p(t)\in R^{n\times n}$ 在 R_+ 上是连续且有界的，$F_p: R_+\times C_n \to R^n$ 是连续的并且满足 $\|F_p(t,x_t)\|\le H_p\|x_t\|$，$H_p$ 是正数。

当 $M=1$时，系统(8)变成如下时滞系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(t,x_t) \\ x_{t_0} = \varphi(\theta), \theta\in[-\tau,0] \end{cases} \tag{9}$$

且 $\|F(t,x_t)\|\le H\|x_t\|$，H 是一个正常数。

引理 2 [17]：对于系统(9)式构造 Lyapunov 函数 $V(t)=x^T(t)Px(t)$，假设存在正数 λ_0，∂，β，对称矩阵 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 使得：

$$\lambda_0 I_n \le Q(t), \alpha I_n \le P(t) \le \beta I_n \tag{10}$$

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) = -Q(t) \tag{11}$$

假设下式：

$$\lambda_0 - 2\beta(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{1}{2}} H \exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\tau\} = \gamma_0\beta$$

这个等式有唯一的正数解 $\gamma_0>0$，则可以得到：

$$\bar{V}(t) \le \bar{V}(t_0) e^{-\gamma_0(t-\tau-t_0)}, \forall t\ge t_0, t_0\ge 0$$

定理 2：假设对于 $\forall P\in M$，存在正常数 λ_p，a_p，b_p，γ_p 和 $\mu_p\ge 1$，存在对称矩阵 $P_p(t)$ 和 $Q_p(t)$ 使得：

$$\lambda_p I_n \le Q_p(t), a_p I_n \le P_p(t) \le b_p I_n \tag{12}$$

$$\dot{P}_p(t) + P_p(t)A_p(t) + A_p^T(t)P_p(t) = -Q_p(t) \quad \forall p\in M \tag{13}$$

假设如下等式：

$$\lambda_p - 2b_p(\frac{b_p}{a_p})^{\frac{1}{2}} H_p \exp\{\frac{1}{2}\gamma_p\tau\} = \gamma_p b_p \tag{14}$$

其中唯一的正常数解 $\gamma_p>0$，并且存在常数 $\mu_p\ge 1$ 使得：

$$P_i(t) \le \mu_p P_j(t), \forall i,j\in M \tag{15}$$

则系统(8)式对于每个切换信号 σ 是全局指数稳定的，模型依赖平均驻留时间满足：

$$T_{ap} > T^*_{ap} = \frac{\ln\mu+\gamma_p\tau}{\gamma_p}$$

状态衰减估计由下式给出：

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{be^{\gamma_p\tau}}{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\gamma_p-\frac{\ln\mu_p+\gamma_p\tau}{T_{ap}}\right)(t-t_0)}} \|x_{t_0}\| \tag{16}$$

其中：

$$a = \min_{p\in M}\{a_p\}, \quad b = \max_{p\in M}\{b_p\},$$

$$\gamma_p = \min\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m\}$$

证明：对于任意的 $p \in M$，构造函数如下：

$$V_p(t) = x^{\mathrm{T}}(t) P_p(t) x(t)$$

其中 $P_p(t)$ 是等式(13)式的解并且满足(12)式。对于 $t \in [t_k, t_{k+1})$，根据条件(12)式、(13)式和(14)式，通过使用引理 2，则可以得到：

$$\bar{V}_p(t) \le \bar{V}_p(t_k) e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)}, \forall t \ge 0, \forall p \in M$$

进而可得下式：

$$\bar{V}_p(t) \le \bar{V}_p(t_k) e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)}$$

类似于定理 1 的证明，考虑到定义 2，则有：

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{\sigma(t)}(t) &\le \mu_p \bar{V}_{\sigma(t_k^-)}(t_k^-) e^{-\gamma_p(t-\tau-t_k)} \\
&\cdots \\
&\le \mu_p^k \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) e^{k\gamma_p\tau} e^{-\gamma_p(t-\tau-t_0)} \\
&\le \mu_p^{\frac{t-t_0}{T_{ap}}} e^{\frac{\gamma_p\tau(t-t_0)}{T_{ap}}} e^{-\gamma_p(t-\tau-t_0)} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) \\
&= e^{-(\gamma_p - \frac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} e^{\gamma_p\tau} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0)
\end{aligned} \tag{17}$$

由(12)式得：

$$a\|x(t)\|^2 \le \bar{V}_p(x(t)) \le b\|x_t\|^2, \forall P \in M$$

根据定义 1 有：

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|^2 &\le \frac{1}{a} \bar{V}_{\sigma(t)}(t) \\
&\le \frac{1}{a} e^{-(\gamma_p - \frac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} e^{\gamma_p\tau} \bar{V}_{\sigma(t_0)}(t_0) \\
&\le \frac{b e^{\gamma_p\tau}}{a} e^{-(\gamma_p - \frac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{T_{ap}})(t-t_0)} \|x_{t_0}\|^2
\end{aligned}$$

也就是(16)式，当 $\gamma_p > \dfrac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{T_{ap}}$，即模型依赖平均驻留时间满足：

$$\mathrm{T}_{ap} > \mathrm{T}^*_{ap} = \frac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{\gamma_p}$$

综上所述，系统(8)是全局指数稳定的，证明完成。

如果 $A_p(t)$，$\forall p \in M$ 是常数矩阵，则系统(8)简化为以下形式：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + F_{\sigma(t)}(t, x_t) \\ x_{t_0} = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0] \end{cases} \tag{18}$$

对于系统(18)，根据定理 2，我们有以下推论。

推论 1：对于任意 $p \in M$，假设存在正定矩阵 P_p 和正常数 λ_p，则 LMIs 如下：

$$P_p A_p + A_p^T P_p + \lambda_p I_n < 0, \forall p \in M \tag{19}$$

成立，对于每个 $P \in M$，以下等式

$$\lambda_p - 2b_p\left(\frac{b_p}{a_p}\right)^{\frac{1}{2}} H_p \exp\{\frac{1}{2}\gamma_p\tau\} = \gamma_p b_p \tag{20}$$

其中有唯一的正常数解 $\gamma_p > 0$。假设存在一个常数 $\mu_p \ge 1$，使得：

$$P_p \le \mu_p P_q, \forall p, q \in M \tag{21}$$

那么系统(18)对于每个具有模型依赖平均驻留时间的切换信号 σ 是全局指数稳定的：

$$T_{ap} > T^*_{ap} = \frac{\ln\mu_p + \gamma_p\tau}{\gamma_p} \tag{22}$$

此外，系统(18)的状态衰减估计由(16)式给出，其中 $\gamma_p = \min_{p\in M}\{\gamma_p\}$，$a_p$ 和 b_p 都是由下式定义的正常数：

$$a_p = \lambda_{\min}(P_p), b_p = \lambda_{\max}(P_p)$$

综上所述，根据(6)式以及条件(12)式和(13)式简化为系统(18)的 LMI (19)式。这个结果直接由定理 2 得出，类似以上证明过程，定理证毕。

3 数值仿真

例 1：考虑下面的切换时滞系统：

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t) + E_{\sigma(t)} x(t-\tau) \tag{23}$$

其中：

$$\sigma(t) = \{1, 2\}，\ A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}，\ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}，$$

$$\|E_i\| \le 0.14 (i = 1, 2)，\ \tau = 0.5$$

在系统(23)中的子系统类似于(6)式中使用的子系

统。设 $\mu_p = 1.02$，通过求解线性矩阵不等式(19)式和(21)式可得出：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0.8746 & 0.6721 \\ 0.6721 & 2.6905 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 0.8698 & 0.6717 \\ 0.6717 & 2.6811 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = 0.0985, \gamma_2 = 0.2263$$

可以得到如下结果：

$$a_1 = \lambda_{\min}(P_1) = 0.6530, b_1 = \lambda_{\max}(P_1) = 2.9121$$
$$a_2 = \lambda_{\min}(P_2) = 0.6479, b_2 = \lambda_{\max}(P_2) = 2.9030$$

通过求解方程(20)式得到：

$$\gamma_1 = 0.0985, \gamma_2 = 0.2263$$

$$\gamma_p = \min\{\gamma_1, \gamma_2\} = 0.0985$$

则可得到模型依赖平均驻留时间如下：

$$T_{ap} > T_{ap}^* = \frac{\ln 1.02 + 0.0985 \times 0.5}{0.0985} = 0.7010$$

那么切换时滞系统(23)对于具有模型依赖平均驻留时间的切换信号是全局指数稳定的。取 $T_{ap} = 0.9 > 0.7010$，根据(16)式获得系统(23)的状态衰减估计：

$$\| x(t) \| \le 2.1729 e^{-0.0109(t-t_0)} \| x_{t_0} \|$$

系统状态图参见如下两图：

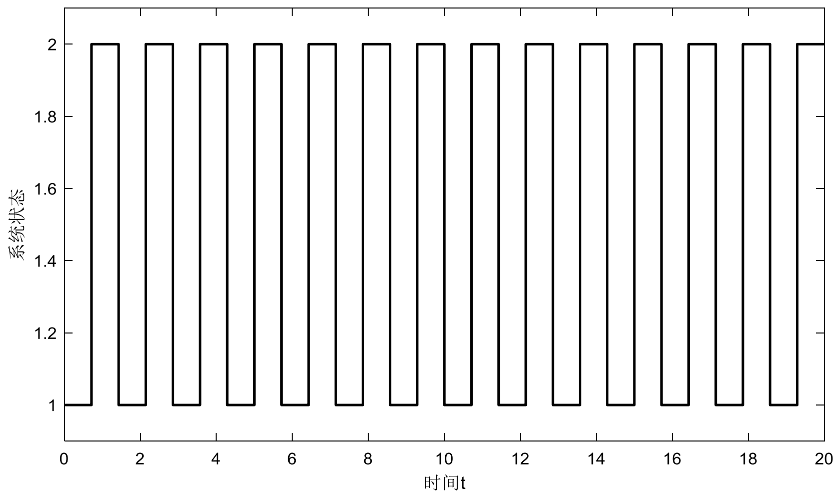

图 1 切换信号图

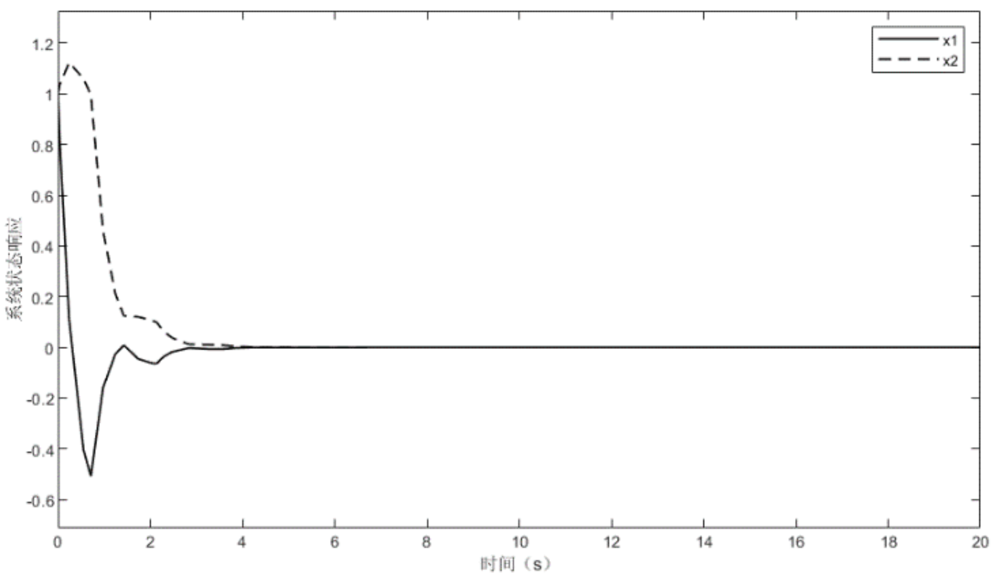

图 2 系统响应曲线

4 结论

本文通过利用灵活性更大、包容性更低、实践性更强的模型依赖平均驻留时间方法成功地解决了一类时滞为常时滞的线性切换时滞系统的指数稳定性问题，采用 Lyapunov 函数方法建立了切换时滞系统指数稳定的充分条件，又通过线性矩阵不等式（LMI）来计算保证指数稳定的模型依赖平均驻留时间的下界，并且还计算了状态衰减估计，最后通过数值算例和动态仿真验证了该方法的有效性。

参考文献

[1] MOEZZI K, AGHDAM A G. Delay-dependent robust stability analysis for switched time-delay systems with polytopic uncertainties [J]. Robust Nonlinear Control, 2015, 25: 1623-1637.

[2] WANG L M, SHAO C. Robust stability analysis of switched uncertain systems with multiple time-varying delays and actuator failures [J]. Control Theory Appl, 2011, 9 (2): 267-272.

[3] F. F. DIGHAM and M. S. AlOUINI, Variable-rate noncoherent M-FSK modulation for power limited systems over Nakagami-fading channels, IEEE Trans. Wireless Commun., 2004, Vol. 3, pp 1295-1304.

[4] D. K. KIM, P. G. PARK and J. W. KO, Output-feedback H∞ control of systems over communication networks using a deterministic switching system approach, Auto-matica, 2004, Vol. 40, pp 1205-1212.

[5] G. M. XIE, and L. WANG, “Stability and stabilization of switched linear systems with state delay: continuous-time case”, The 16th Mathematical Theory of Networks and Systems Conference (MTNS2004), Catholic Univer-sity of Leuven (K. U. Leuven-Belgium), July 5-9, 2004.

[6] G. S. ZhAI, Y. SUN, X. K. CHEN and N. M. ANTHONY, “Stability and gain analysis for switched symmetric systems with time delay”, Proc American Control Conference, 2003, pp. 2682-2687.

[7] E. FRIDMAN and U. SHAKED, Delay-dependent stability and H∞ control: constant and time-varying delays, Int. J. Control, 2003, vol. 76, pp 48-60.

[8] Y. S. MOON, P. PARK, W. H. KWON and Y. S. LEE, Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems, Int. J. Control, 2001, vol. 74, pp 1447-1455.

[9] Y. HE, M. WU, J. SHE and G. LIU, Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties, IEEE Trans. Automat. Contr., 2004, vol. 49, pp 828-832.

[10] Q. L. HAN and K. Q. GU, On robust stability of time-delay systems with norm-bounded uncertainty, IEEE Trans. Automat. Contr., 2004, vol. 46, pp 1426-1431.

[11] S. Y. XU, J. LAM; S. D. HUANG; C. W. YANG, H_∞ model reduction for linear time-delay systems: Continuous-time case, Int. J. Control, 2001, vol. 74, pp 1062-1074.

[12] J. K. HALE and S. M. VERDUVN LUNEL, Introduction to functional differential equations, Applied mathematical sciences, New York: Springer, 1993, Vol. 99.

[13] B. G. XU, Decay estimates for retarded dynamic systems, International Journal of Systems Science, 1999, Vol. 30, pp 427-439.

[14] M. JANKOVIC, Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems, IEEE Trans. Automat. Contr., 2001, Vol. 46, pp 1048-1060.

[15] LIU LJ, ZHAO X, SUN XM and ZONG G (2018b), Stability and l2-gain analysis of discrete-time switched systems with mode-dependent average dwell time. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems., 2020, Vol. 50 (6): 2305-2314.

[16] LIU L J, ZHAO X, SUN X M, et al. L p-based observer design for switched positive linear time-delay systems [J]. Transactions of the Institute of Measurement and Control, 2019, 41 (9): 2419-2427.

[17] Xi-Ming Sun, G. M. Dimirovski, Jun Zhao and Wei Wang, "Exponential stability for switched delay systems based on average dwell time technique and Lyapunov function method," 2006 American Control Conference, Minneapolis, MN, 2006, pp. 5.

[18] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi and M. Liu, "Stability and Stabilization of Switched Linear Systems With Mode-Dependent Average Dwell Time," in IEEE Transactions on Automatic Control, July 2012, vol. 57, no. 7, pp. 1809-1815.