

# 幂硬化材料裂纹尖端应力场特征参数近似解



端传捷<sup>1,\*</sup>, 张淑华<sup>2</sup>

<sup>1</sup>三江学院土木工程学院, 江苏南京 210012

<sup>2</sup>河海大学港口海岸与近海工程学院, 江苏南京 210024

**摘要:** 针对 I 型裂纹尖端场的渐进解析解提出的  $J$ - $A$  双参数法可有效地表征幂硬化材料裂尖应力场分布及其裂尖拘束度。本文较系统地梳理了常用的裂纹尖端应力场表征方法, 以单边缺口试样为例, 阐明了  $J$ - $A$  双参数法表征 I 型裂纹裂尖拘束的优越性。 $J$ - $A$  双参数法中存在三类重要参数, 包括特征指数、无量纲积分常数及应力分布角函数。基于幂硬化材料现有的裂尖渐近场高阶解析解, 编制了计算程序计算这三类重要参数, 基于程序的计算结果采用非线性拟合方法给出了从低硬化到高硬化水平下各类参数的高精度经验公式, 拟合决定系数  $R^2$  均达到 0.999 以上。最后给出了拘束参数  $A$  的两种计算方法, 采用拟合的方法确定断裂控制区域内的拘束参数  $A$  更为合理, 给出了直接计算参数  $A$  的公式, 结合三类参数的拟合公式计算了单边缺口拉伸试样的裂尖拘束度, 结果表明本文提出的各类重要参数的计算公式可获得高精度的裂尖拘束参数  $A$ , 从而可方便  $J$ - $A$  双参数法的广泛应用。

**关键词:** 裂尖应力场;  $J$ - $A$  三项解; 特征参数; 非线性拟合

**DOI:** [10.57237/j.se.2023.05.002](https://doi.org/10.57237/j.se.2023.05.002)

## Approximate Solutions of Characteristic Parameters of Stress Field at Crack Tip in Power Hardening Materials

Duan Chuanjie<sup>1,\*</sup>, Zhang Shuhua<sup>2</sup>

<sup>1</sup>College of Civil Engineering, Sanjiang University, Nanjing 210012, China

<sup>2</sup>College of Harbour, Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China

**Abstract:** The  $J$ - $A$  two-parameter method proposed for the asymptotic analytical solution of type-I crack-tip field can effectively characterize the crack-tip stress field distribution and its constraint for power-hardening materials. This paper systematically summarizes commonly used methods for characterizing stress fields at crack tips. Taking the single-edged notched tension specimen as an example, the superiority of the  $J$ - $A$  two-parameter method in characterizing the crack tip constraint of type I cracks is demonstrated. The  $J$ - $A$  two-parameter method consists of three important parameters, including characteristic index, dimensionless integration constant and stress distribution angle function. Based on the existing high-order analytical solutions for the crack tip asymptotic field of power-hardening materials, a calculation

基金项目: 江苏省高等学校基础科学 (自然科学) 面上项目《管线环焊缝拘束相关的裂纹扩展阻力曲线研究》(编号: 21KJD560003).

\*通信作者: 端传捷, [Chj\\_duan@yeah.net](mailto:Chj_duan@yeah.net)

收稿日期: 2023-08-10; 接受日期: 2023-09-25; 在线出版日期: 2023-10-09

<http://www.sciandeng.com>

program is compiled to compute these important parameters. High-precision empirical formulas for various parameters, ranging from low to high hardening levels, are obtained using the nonlinear fitting method with the determination coefficient  $R^2$  reaching above 0.999. Finally, two methods for calculating the constraint parameter  $A$  are presented. It is found that using the fitting method to determine the constraint parameter  $A$  in the fracture control zone is more reasonable. A formula for directly calculating parameter  $A$  is also provided. Combined with the fitting formulas for the three parameters, the crack tip constraint of the single-edged notched tension specimen is calculated. Results show that the proposed calculation formulas can obtain crack tip constraint parameter  $A$  with high precision, facilitating the wide application of the  $J$ - $A$  two-parameter method.

**Keywords:** Crack-tip Stress Field;  $J$ - $A$  Three-term Solution; Characteristic Parameters; Nonlinear Fitting

## 1 引言

了解弹塑性体裂纹尖端附近区域中的应力和位移场对于确定断裂力学准则至关重要。众所周知, 裂纹尖端附近的应力场强烈依赖与几何形状、加载条件和材料性质等有关的裂尖拘束度。在小范围屈服情况下, 裂纹尖端附近区域的三轴应力水平较高, 裂纹尖端应力场仅由单参数  $J$  积分即可很好地描述; 但在大范围屈服情况下, 由于塑性变形的增大会导致裂纹尖端附近区域三轴应力水平降低,  $J$  主导将会逐渐消失。为此, 学者们提出了若干双参数方法, 如  $J$ - $T$  [1]、 $J$ - $Q$  [2, 3] 和  $J$ - $A_2$  (或  $J$ - $A$ ) [4-7] 来描述此类情况下的裂纹尖端场。

$J$ - $A_2$  双参数法是 I 型裂纹尖端场的高阶渐近解析解, 取自裂尖场应力函数展开式的前三项, 理论研究发现 [3], 当外荷载超过 1.2 倍试样的极限荷载时, 裂纹尖端发生大范围屈服直至试样整体全部屈服的过程中  $A_2$  基本保持不变。 $J$ - $A$  双参数法 [7] 是在  $J$ - $A_2$  的基础提出的, 两者完全等价,  $A_2$  与  $A$  之间可直接相互转化,  $J$ - $A$  理论的数学表达更为简洁。该理论中的特征参数在文献中 [8-10] 只给出了特定硬化指数下的值或曲线图, 运用不便, 因此本文在已有研究 [9, 11] 的基础上, 对  $J$ - $A$  理论中的重要参数进行了编程计算, 给出了高精度的经验公式以方便实际运用。

## 2 常用裂纹尖端应力场表征

Hutchinson [12], Rice 和 Rosengren [13] 通过理论分析得出 Ramberg-Osgood 幂硬化材料 (应力应变关系如式 (1) 所示) I 型裂纹尖端附近的应力场、应变场和位移场的渐近解, 简称 HRR 解。

$$\varepsilon/\varepsilon_0 = \sigma/\sigma_0 + \alpha(\sigma/\sigma_0)^n \quad (1)$$

式中,  $\sigma_0$  表示屈服强度,  $\alpha$  表示材料常数,  $n$  表示硬化指数,  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$ , 当  $\sigma_0$  取 0.2% 名义屈服强度时有  $\alpha\sigma_0/E = 0.002$ 。极坐标系下幂硬化材料 I 型裂纹尖端附近的应力场  $\sigma_{ij}(r, \theta)$  的渐近解可表示为:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \sigma_0 \left( \frac{J}{\alpha\sigma_0\varepsilon_0 r l_n} \right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}(n, \theta) \quad (2)$$

式中,  $l_n$  表示与  $n$  有关的积分常数,  $\tilde{\sigma}_{ij}$  表示与  $n$  和  $\theta$  有关的无量纲应力角函数,  $r$  表示距裂尖的距离。已有研究结果发现 [14]: 对于不同的裂纹几何和外荷载形式, HHR 场在一定程度上可描述裂纹尖端附近环形区域内真实的应力、应变分布。需要注意的是, HHR 场是基于全量理论提出的, 因而对于弹塑性问题只允许单调加载; HHR 解是裂纹尖端附近应力场的主项, 它不是完全解答, 也不是远场解。

在小范围屈服情况下, 裂纹尖端附近区域的三轴应力水平较高, 裂纹尖端应力/应变场仅由单参数  $J$  积分即可很好地描述; 但在大范围屈服情况下, 由于塑性变形的增大会导致裂纹尖端附近区域三轴应力水平降低, 其应力/应变场会偏离 HHR 场, 这就是通常所说的拘束丧失, 即在裂纹处于低拘束状态下, 当外荷载逐步增大时, 裂纹尖端由小范围屈服到大范围屈服的过程中,  $J$  主导将会逐渐消失, 定量描述裂纹尖端应力场还需要再结合其他的参数。

Li 和 Wang [15] 首先提出了小应变情况下 I 型裂纹尖端的二阶渐近解, O'Dowd 和 Shih [2] 在此基础上进行了系统的有限元分析提出  $J$ - $Q$  双参数法来表征裂纹尖端场, 基于 HRR 场的  $Q$  一般定义为:

$$Q_{\text{HRR}} = \frac{(\sigma_{\theta\theta})_{\text{FEA}} - (\sigma_{\theta\theta})_{\text{HRR}}}{\sigma_0} \quad (3)$$

式中,  $(\sigma_{\theta\theta})_{\text{FEA}}$  为有限元计算得到的裂纹尖端附近区域内的张开应力, 当裂纹尖端处于高拘束状态,  $Q_{\text{HRR}}$  接近 0, 当裂纹尖端处于低拘束状态,  $Q_{\text{HRR}} < 0$ , 且拘束越低,  $Q_{\text{HRR}}$  越小。实际上,  $Q_{\text{HRR}}$  是与载荷有关的, 尤其是在大范围屈服情况下,  $Q_{\text{HRR}}$  随着裂纹尖端塑性变形的增加而不断变化, 且在此过程中  $r$  对  $Q_{\text{HRR}}$  的影响也在增大, 针对  $J$ - $Q$  解的不足, Yang 和 Chao 等[16] 经复杂的数学推导后得到了弹塑性裂纹尖端应力场的  $J$ - $A_2$  三项解:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = A_1 \left[ \left( \frac{r}{L} \right)^{s_1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + A_2 \left( \frac{r}{L} \right)^{s_2} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} + A_2^2 \left( \frac{r}{L} \right)^{s_3} \tilde{\sigma}_{ij}^{(3)} \right] \quad (4)$$

式中,  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$  ( $k=1, 2, 3$ ) 表示与  $n$  和  $\theta$  有关的无量纲应力角分布函数,  $L$  表示特征长度 (通常可取单位长度、裂纹长度、试样宽度等),  $A_1$  和  $s_1$  是 HRR 奇异场的相关参数:

$$A_1 = \left( \frac{J}{\alpha \sigma_0 \varepsilon_0 I_n L} \right)^{-s_1}, \quad s_1 = -\frac{1}{n+1} \quad (5)$$

对于  $n \geq 3$  有,  $s_3 = 2s_2 - s_1$ 。基于上述  $J$ - $A_2$  三项解, Nikishkov 等[7]提出了  $J$ - $A$  三项解:

$$\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0} = A_0 \bar{r}^s \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} - A \bar{r}^t \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + \frac{A^2}{A_0} \bar{r}^{2t-s} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)} \quad (6)$$

其中:  $A_0 = (\alpha \varepsilon_0 I_n)^{-1/(n+1)}$ ,  $\bar{r} = r/(J/\sigma_0)$ ,  $A_2$  与  $A$  存在定量关系:  $A = -A_0 (J/\sigma_0 L)^{t-s} A_2$ 。当  $A_2$  与  $A$  为 0 时,  $J$ - $A_2$  ( $A$ ) 三项解退化为 HRR 解。研究表明[17], 相比传统的紧凑拉伸试样和三点弯曲试样, 单边缺口试样的裂尖拘束水平与实际构件表面裂纹的拘束水平更为接近。图 1 和图 2 分别给出了单边缺口拉伸试样在  $a/W=0.2$ 、 $n=10$ 、 $\theta=0$ 、 $J \approx 220 \text{ N/mm}$  时  $Q_{\text{HRR}}$  与  $A$  在  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ 、 $J/\sigma_0 < r \leq 5J/\sigma_0$  区域内的分布, 参数  $A$  的具体计算方法详见下文第三节。可以看到,  $Q_{\text{HRR}}$  与距裂尖的距离  $r$  有明显的相关性, 且随着  $r$  的增大,  $Q_{\text{HRR}}$  逐渐变小, 而在环向 45 度范围内,  $Q_{\text{HRR}}$  也随着角度的增大而减小; 尽管  $A$  也随着  $r, \theta$  的变化而变化, 但其变化幅度较  $Q_{\text{HRR}}$  小很多, 当  $r \geq 2J/\sigma_0$  时,  $Q_{\text{HRR}}$  与

其在上述范围内的平均值间的偏差高达 17.5% 左右, 而  $A$  与其在上述范围内的平均值间的偏差最大仅为 3.5% 左右, 这也进一步说明了  $J$ - $A$  三项渐近解的优势, 即大范围屈服下,  $A$  基本不依赖于  $r, \theta$ 。

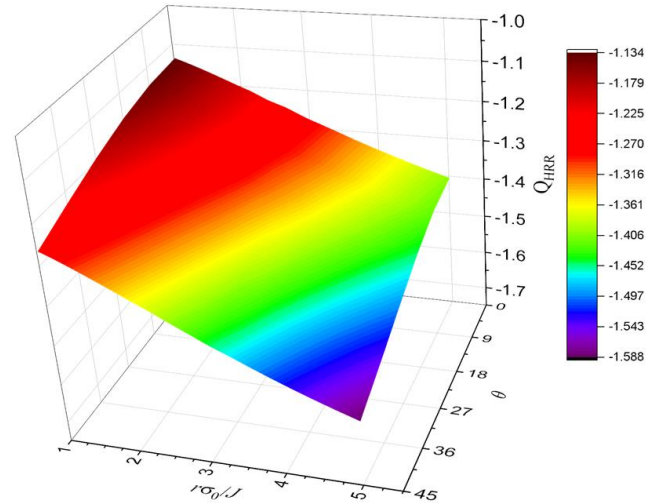


图 1  $Q_{\text{HRR}}$  在断裂控制区内的分布

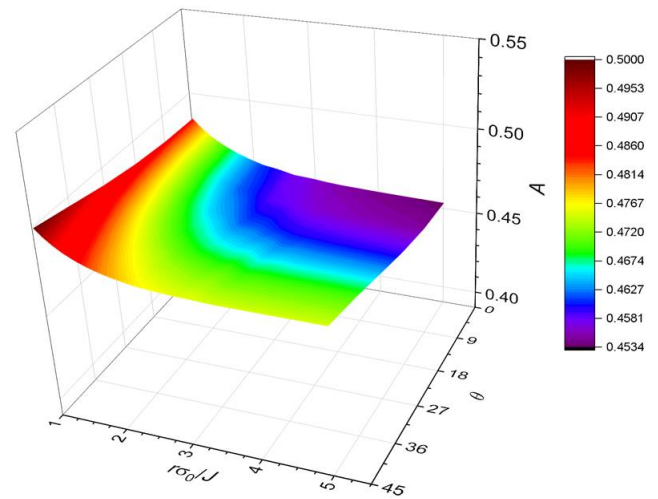


图 2  $A$  在断裂控制区内的分布

### 3 $J$ - $A$ 三项解特征参数近似解

因  $J$ - $A$  三项渐近解描述弹塑性裂纹尖端场具有较高的精度而被广泛使用, 但其解需知道应力角函数、特征指数  $t$  及无量纲积分常数  $I_n$  的值, 目前已发表的文献中或列出了某些硬化指数下零度角对应的角函数值 (如  $n=5, 10, 15$  等), 或给出这些硬化指数对应的角函数分布图, 不方便实际应用。本文通过已有理论分析成果编写了 Python 计算程序, 可计算特征指数  $t$ 、无量纲积分  $I_n$  及应力分布角函数  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ 。

根据  $J_2$  形变理论、塑性力学全量理论，R-O 幂硬化材料的本构方程如下：

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{s_{ij}}{\sigma_0} \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{kk} \delta_{ij} / 3, \sigma_e = \left( \frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2} \end{cases} \quad (7)$$

式中， $\sigma_e$  表示 Mises 等效应力， $s_{ij}$  表示偏应力张量， $\sigma_{kk}$  表示静水应力张量， $\delta_{ij}$  表示克罗内克尔记号。裂纹尖端附近小范围内应力场采用三项渐近场逼近时，Yang 等[16]提出当  $n \geq 3$  时，弹性应变足够小，可以在三项解中略去，则式(7)中  $\varepsilon_{ij}$  的退化为：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2} \alpha \varepsilon_0 (\sigma_e / \sigma_0)^{n-1} s_{ij} / \sigma_0 \quad (8)$$

对于二维 I 型裂纹弹塑性平面应变问题，可联立弹性力学理论平面问题极坐标系下的平衡方程及几何方

程进行求解。由于裂纹面上不受力以及 I 型裂纹的对称性，此问题的边界条件为  $u_\theta(0)=0$ ， $\sigma_{r\theta}(0)=0$ ， $\sigma_\theta(\pi)=0$ ， $\sigma_{r\theta}(\pi)=0$ 。

Huang 通过理论推导给出了关于  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$  的微分方程组，其中包含了应变角分布函数  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  和位移角分布函数  $\tilde{u}_{ij}^{(k)}$  [8]。本文采用求解两点边值问题的四阶龙格-库塔法数值求解这些常微分方程组，由牛顿-拉夫森方法来确定各未知变量的初始值，采用 Python 语言编写了计算 I 型弹塑性裂尖应力场及位移场三项渐近解的角分布函数、特征指数  $t$  及无量纲积分常数  $I_n$  的程序。

表 1 给出了硬化指数介于 3~20 之间由程序计算的  $t$  和  $I_n$ 。为方便快速得到这两个参数的值，这里采用最小二乘法对其进行拟合，表达式分别如(9)、(10)所示，拟合决定系数  $R^2$  均为 1，拟合曲线分别如图 3 所示，由此可精确计算任意  $n$  ( $3 \leq n \leq 20$ ) 值对应的  $t$  和  $I_n$ 。

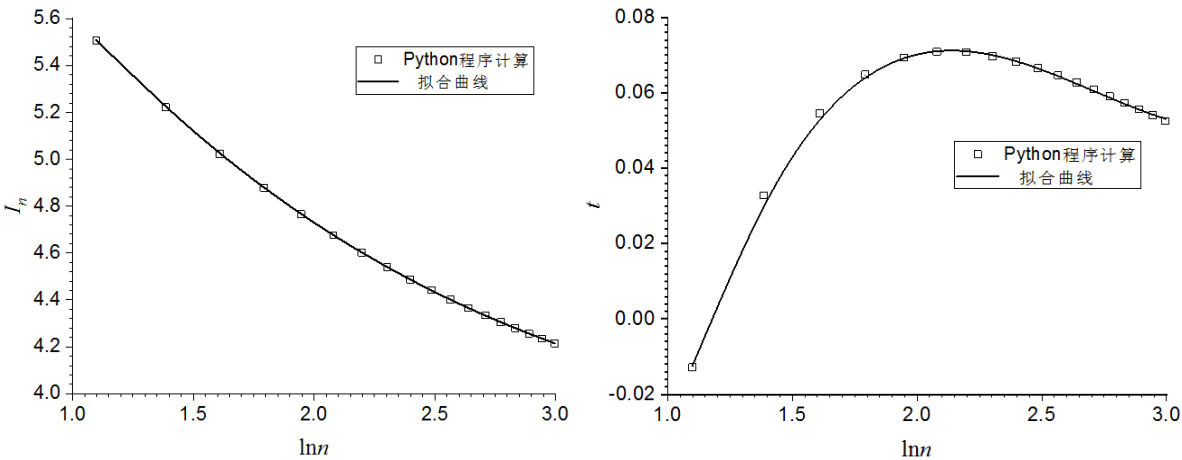


图 3 特征指数  $t$  及无量纲积分常数  $I_n$  曲线拟合

表 1 特征指数  $t$  及无量纲积分常数  $I_n$

$n$	$t$	$I_n$
3	-0.01284	5.50732
4	0.03282	5.22128
5	0.05455	5.0235
6	0.06482	4.87825
7	0.06937	4.76554
8	0.07091	4.67614
9	0.07078	4.60183
10	0.06977	4.5399
11	0.06827	4.48694
12	0.06651	4.44162
13	0.06468	4.40099
14	0.06279	4.36545

$n$	$t$	$I_n$
15	0.06093	4.33424
16	0.05911	4.30527
17	0.05733	4.28014
18	0.05565	4.25603
19	0.05404	4.23456
20	0.05249	4.21513

$$t = -0.00473 \ln^4 n + 0.0679 \ln^3 n - 0.35036 \ln^2 n + 0.75138 \ln n - 0.49866 \quad (9)$$

$$I_n = -0.0228 \ln^3 n + 0.3227 \ln^2 n - 1.695 \ln n + 7.0107 \quad (10)$$

通常，采用  $J$ - $A$  三项解研究裂尖附近应力场分布及其拘束度时使用张开应力  $\sigma_{\theta\theta}$ ，且在计算拘束度时  $\theta$  角介

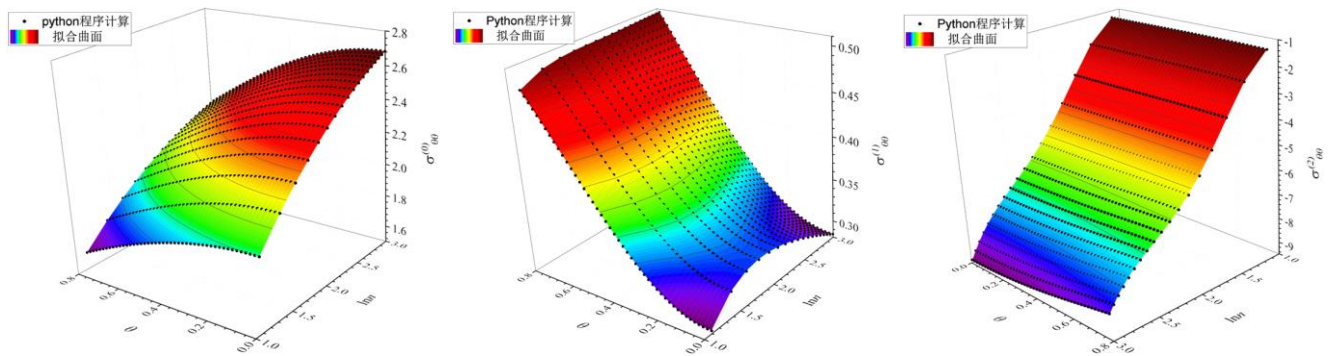


于  $0^\circ$  与  $45^\circ$  之间, 根据所编程序计算结果(因数据点众多, 此处未列表展示), 采用最小二乘法拟合出  $\sigma_{\theta\theta}^{(k)}(n, \theta)$  的显式公式以快速计算得到任意  $n$  ( $3 \leq n \leq 20$ ) 下张开应力角函数的值, 其表达式如(11)所示 ( $\theta$  按弧度取值), 公式中的系数分别见表 2, 拟合决定系数  $R^2$  分别为 1、0.9999 和 0.9998, 拟合曲面与程序计算结果对比如图 4 所示, 最大拟合误差分别为 0.04%、0.29% 和 1.32%。

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta}^{(0)}(n, \theta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 (a_{ij} \ln^j n) \theta^i & R^2 = 1 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)}(n, \theta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^4 (b_{ij} \ln^j n) \theta^i & R^2 = 0.99998 \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)}(n, \theta) = \sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^4 (c_{ij} \ln^j n) \theta^i & R^2 = 0.99985 \end{cases} \quad (11)$$

表 2 式(11)中的拟合系数

		i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
$a_{ij}$	j = 0	1.1028	-0.0170	-0.1172	-0.2281	—
	j = 1	0.9319	0.0038	-0.5169	0.4324	—
	j = 2	-0.1649	0.0116	0.0372	-0.0863	—
	j = 3	0.0100	-0.0026	0.0058	0.0053	—
$b_{ij}$	j = 0	-0.0753	0.0592	1.3698	-1.1514	—
	j = 1	0.6067	-0.1930	-1.1087	1.3492	—
	j = 2	-0.3311	0.1577	0.4672	-0.7371	—
	j = 3	0.0776	-0.0532	-0.0664	0.1744	—
	j = 4	-0.0071	0.0064	0.0018	-0.0154	—
$c_{ij}$	j = 0	-24.3262	0.6468	-1.3922	3.8242	-2.1730
	j = 1	57.6778	-1.7933	8.4968	-19.3779	11.4719
	j = 2	-49.2311	1.5663	-9.6658	21.5212	-13.2434
	j = 3	16.6394	-0.5347	3.6964	-8.2818	5.2406
	j = 4	-2.0289	0.0634	-0.4415	1.0562	-0.6909

图 4 角函数  $\sigma_{\theta\theta}^{(k)}$  拟合曲面与程序计算结果对比

## 4 拘束参数 A 的计算方法

目前计算  $J$  积分的理论及方法已经成熟, 通常基于有限元结果采用域积分方法计算  $J$  积分。计算拘束参数  $A$  的方法目前主要有两种, 一种是“点匹配法”, 即直接求解式(6)得到 (取正根), 通常选取的应力分量为张开应力  $\sigma_{\theta\theta}$ , 点的位置为  $r\sigma_0/J=2$ ,  $\theta=0^\circ$ ; Yang 等[6, 16]选用应力分量  $\sigma_{\theta\theta}$ 、 $\sigma_{rr}$  分别计算在  $r\sigma_0/J=2$ ,  $\theta=0^\circ$  和  $45^\circ$  两点处的  $A$  值, 并取它们的平均值作为最终

的拘束参数  $A$ 。另一种方法是使用典型断裂区域内 ( $1.5 \leq r\sigma_0/J \leq 5$ ,  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ) 的点来拟合方程(6) [7, 11]。根据图 1 可知, 拘束参数  $A$  在此断裂控制区域虽分布基本一致, 仍存在较小的梯度, 由通过拟合计算出的  $A$  来反映裂尖拘束更为合理, 从而对于区域内第  $i$  个拟合点  $(r_i, \theta_i)$ , 方程(6)可表示为:

$$a_i A^2 + b_i A + c_i = \delta_i \quad (12)$$

$$\begin{cases} a_i = \bar{r}_i^{2t-s} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(n, \theta_i) / A_0 \\ b_i = -\bar{r}_i^t \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(n, \theta_i) \\ c_i = A_0 \bar{r}_i^s \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(n, \theta_i) - \sigma_{ij}^{\text{FEM}}(n, \bar{r}_i, \theta_i) / \sigma_0 \end{cases} \quad (13)$$

其中， $\delta_i$  表示三项渐近解与有限元解在第  $i$  个拟合点处的偏差，最小化偏差平方和后可得关于拘束参数  $A$  的三次方程：

$$d_3 A^3 + d_2 A^2 + d_1 A + d_0 = 0 \quad (14)$$

$$\begin{cases} d_0 = \sum b_i c_i \\ d_1 = \sum (b_i^2 + 2a_i c_i) \\ d_2 = 3 \sum a_i b_i \\ d_3 = 2 \sum a_i^2 \end{cases} \quad (15)$$

方程(14)中的应力分量可用  $\sigma_{\theta\theta}$ 、 $\sigma_{rr}$  或者两者的组合（如  $\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{rr}$ ），一般应力分量选用  $\sigma_{\theta\theta}$ ，当上述三次方程的根全为实根时，选与  $c_i$  有相同符号的根作为拘束

参数  $A$ ，根据  $J$  积分大小拟合点数目一般介于 40~60 之间。上述三次方程也可采用盛金公式求解，本文通过计算发现其中能作为拘束参数  $A$  的根为：

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3d_3} \left[ -d_2 + \sqrt{d_2^2 - 3d_3 d_1} \left( \cos \frac{\theta}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\theta}{3} \right) \right] \\ \theta = \arccos \frac{2d_2(d_2^2 - 3d_3 d_1) - 3d_3(d_2 d_1 - 9d_3 d_0)}{2\sqrt{(d_2^2 - 3d_3 d_1)^3}} \end{cases} \quad (16)$$

以单边缺口拉伸试样为例，采用式(16)计算不同裂纹尺寸、不同硬化指数及不同荷载水平下的裂尖拘束参数  $A$ ，与文献[5]的对比结果详见表 3（极限荷载  $P_L$  可见文献[5]），在小范围屈服到大范围屈服的过程中，拘束参数  $A$  之间的最大计算偏差仅为 2.52%，证明该方法是合理的、正确的。

表 3 式(16)计算结果与文献[5]的结果对比

n	$\frac{P}{P_L}$	a/W = 0.2			a/W = 0.5		
		本文 A	A [5]	偏差(%)	本文 A	A [5]	偏差(%)
5	0.5	0.4778	0.4902	-2.52	0.4082	0.4133	-1.23
	0.75	0.5594	0.5564	0.54	0.4293	0.4374	-1.85
	0.9	0.5983	0.5981	0.03	0.4523	0.4543	-0.44
	1.0	0.6276	0.6251	0.40	0.4670	0.4696	-0.54
	1.1	0.6504	0.6428	1.18	0.4844	0.4843	0.02
	1.3	0.7060	0.6977	1.18	0.5223	0.5226	-0.06
10	0.5	0.2598	0.2648	-1.89	0.2047	0.2084	-1.78
	0.75	0.3235	0.3210	0.79	0.2166	0.2207	-1.87
	0.9	0.3666	0.3602	1.78	0.2328	0.2357	-1.24
	1.0	0.3933	0.3864	1.79	0.2436	0.2439	-0.13
	1.1	0.4221	0.4124	2.36	0.2584	0.2579	0.18
	1.2	0.4517	0.4462	1.24	0.2749	0.2754	-0.20

5 结论

$J$ - $A$  双参数理论能更为准确地描述平面应变 I 型裂纹尖端应力场及其裂尖拘束度，裂尖从小范围屈服到大范围屈服直至试样整体发生屈服的过程中，参数  $A$  基本保持不变，这拓宽了该理论的应用范围。鉴于幂硬化材料在一般硬化水平下，现有文献缺乏任意硬化指数(介于 3~20 之间)下  $J$ - $A$  双参数理论的特征指数、无量纲积分常数及应力分布角函数等重要参数，本文基于已有裂尖高阶场渐进解析解编制了计算程序，经

非线性拟合给出了上述三类参数在一般硬化水平下的高精度经验公式，同时也给出了根据有限元结果直接计算拘束参数  $A$  的公式。单边缺口拉伸试样的计算结果证明了拟合经验公式及参数  $A$  的具体的计算方法的合理性与正确性。

参考文献

[1] Betegon C, Hancock J W. Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields [J]. International Journal of Applied Mechanics, 1991, 58: 104-110.

- [2] O'Dowd N P. Application of two parameter approaches in elastic-plastic fracture mechanics [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995, 52: 445-465.
- [3] Wang X. Two-parameter characterization of elastic-plastic crack front fields surface cracked plates under tensile loading [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2009, 76: 958-982.
- [4] Yang S. Higher order asymptotic crack tip fields in a power-law hardening material [D]. USA: University of South Carolina, 1993.
- [5] Ding P, Wang X. Solutions of the second elastic-plastic fracture mechanics parameter in test specimens [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, 77: 3462-3480.
- [6] Ding P, Wang X. Solutions of the second elastic-plastic fracture mechanics parameter in test specimens under biaxial loading [J]. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 2013, 111-112: 279-294.
- [7] Nikishkov G P, Matvienko Y G. Elastic-plastic constraint parameter A for test specimens with thickness variation [J]. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2016, 39: 939-949.
- [8] Huang Y. Numerical Assessments of Cracks in Elastic-Plastic Materials [M]. Heidelberg: Springer Berlin, 2002.
- [9] 王自强, 陈少华. 高等断裂力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
- [10] Nestor P. Fracture Mechanics (second edition) [M]. Switzerland: Springer Cham, 2017.
- [11] Duan C J, Zhang S H. Two-parameter J-A estimation for weld centerline cracks of welded SE (T) specimen under tensile loading. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, 107(7): 102435.
- [12] Hutchinson J W. Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1968, 16: 13-31.
- [13] Rice J R, Rosengren G F. Plane Strain deformation near a crack tip in a power law hardening material [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1968, 16: 1-12.
- [14] 酆正能. 应用断裂力学 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2012.
- [15] Li Y C, Wang T C. Higher-order asymptotic field of tensile plane-strain nonlinear crack problem [J]. *Science in China (Ser. A)*, 1986, 29: 941-955.
- [16] Chao Y J, Yang S, Sutton M A. On the fracture of solids characterized by one or two parameters: theory and practice [J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1994, 42: 629-647.
- [17] Nyhus B, Polanco M L, Orjaseth O. SENT specimens an alternative to SENB specimens for fracture mechanics testing of pipelines [C]. In: *Proceedings of ASME 22<sup>nd</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Cancun, Mexico, 2003: 259-266.