

集值优化问题强有效解的二阶次微分刻画



邱夕芸¹, 王其林^{2,*}

¹重庆交通大学数学与统计学院, 重庆 400074

²重庆交通大学复杂系统优化与智能控制重庆市高校重点实验室, 重庆 400074

摘要: 主要讨论集值优化问题强有效解的最优性条件。首先, 借助于集值映射的二阶弱次微分, 利用集合优化问题强有效解与复合优化问题最优解的关系, 在广义锥次似凸假设条件下建立了无约束集值优化问题强有效解的最优性必要条件和充分条件。同时, 利用集值映射的二阶弱次微分, 在广义锥次似凸假设条件下也获得了无约束复合优化问题的几个最优性必要条件和充分条件。其次, 引入了约束集值优化问题的一类鞍点, 并在广义锥次似凸和约束集值优化问题鞍点的假设条件下, 建立了约束集值优化问题强有效解的最优性充分条件。另外, 借助于集值映射的二阶弱次微分, 在广义锥次似凸假设条件下, 建立了约束集值优化问题强有效解的最优性充分条件。最后, 在广义锥次似凸假设条件下, 获得了约束复合优化问题最优解的 2 个最优性充分条件。

关键词: 集值优化问题; 强有效解; 二阶弱次微分; 最优性条件

DOI: [10.57237/j.wjms.2026.01.003](https://doi.org/10.57237/j.wjms.2026.01.003)

The Second-order Subdifferential Characterization of the Strong Efficient Solution of Set-valued Optimization Problems

Xiyun Qiu¹, Qilin Wang^{2,*}

¹College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China

²Key Laboratory of Complex Systems Optimization and Intelligent Control of Chongqing Municipal Education Commission, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China

Abstract: This paper discusses the optimality conditions for the strong efficient solutions of set-valued optimization problems. Firstly, by using the second-order weak subdifferential of set-valued mappings and the relationship between the strong efficient solutions of set-valued optimization problems and the optimal solutions of composite optimization problems, one establishes the optimality necessary and sufficient conditions of the strong efficient solutions for unconstrained set-valued optimization problems. Meanwhile, by using the second-order weak subdifferential of set-valued mappings, several optimality necessary and sufficient conditions of unconstrained composite optimization problems are obtained under the assumption of generalized cone sub-convexlikeness. Secondly, one introduces a class of saddle points

基金项目: 重庆市教委科学技术研究计划项目 (No. KJZD-K202300708); 重庆市研究生研究与创新项目 (No. CYS240517).

*通信作者: 王其林, wangql97@126.com

收稿日期: 2026-01-21; 接受日期: 2026-02-10; 在线出版日期: 2026-02-26

<http://www.wjoms.com>

for constrained set-valued optimization problems. Then, several sufficient optimality conditions for strong efficient solutions of constrained set-valued optimization problems are established under the assumptions of generalized cone sub-convexlikeness and saddle points for constrained set-valued optimization problems. Additionally, by using the second-order weak subdifferential of set-valued mappings, the sufficient optimality conditions for strong efficient solutions of constrained set-valued optimization problems are established under the assumption of generalized cone sub-convexlikeness. Finally, two optimality sufficient conditions for the optimal solutions of the constrained composite optimization problem are obtained under the assumption of generalized cone sub-convexlikeness.

Keywords: Set-value Optimization Problems; Strong Efficient Solutions; Second-order Subdifferentials; Optimality Conditions

1 引言

次微分在构建优化问题的最优性条件中起着非常重要的作用。次微分的概念最初是由 Rockafellar [1] 针对凸函数提出的。为了改进传统的次微分, Azimov 和 Gasimov [2] 引入了非凸函数的弱次微分的概念。Kasmbeyli 和 Mammadov [3] 建立了非凸实值函数的弱次微分、方向导数和径向导数之间的一些关系。他们 [4] 利用非凸实值函数的弱次微分方法建立了非凸优化问题的最优性必要条件。Chen 和 Jahn [5] 引入了一般集值映射的弱次梯度, 并建立了集值优化问题极小解的最优性充分条件。Li 和 Guo [6] 利用集值映射的弱次微分, 建立了约束和无约束集值优化问题的最优性必要条件和充分条件。由于非凸集在边界点处支撑超平面不一定存在, Inceoglu [7] 为单值函数定义了一类新的二阶弱次微分, 并建立了二阶弱次可微函数存在全局最小值的必要条件和充分条件。Zhai 等人 [8] 通过标量化方法给出了向量值映射的二阶微分, 并得出了向量值映射全局最小值的充分必要条件。为了将文献 [7] 的函数二阶弱次微分推广到向量值映射, 受文献 [8] 的启发, Wang 和 Zhang [9] 通过标量化方法给出了向量值映射的二阶弱微分, 得到了无约束向量优化问题和无约束复合向量优化问题弱有效解的最优性必要条件和充分条件。Du 等人 [10] 为集值映射定义了二阶弱次微分, 并利用此二阶弱次微分, 建立了约束集值优化问题 Henig 真有效解的最优性必要条件和充分条件。同时, 借助于集值映射的二阶弱次微分, 构建了约束值优化问题的 Mond-Weir 型对偶问题, 并建立了相应的弱对偶、强对偶和逆对偶定理。

据我们所知, 到目前为止, 还没有利用集值映射的二阶弱次微分讨论约束和无约束集值优化问题强有效解的最优性条件的文献, 本文将在合理的假设条件下, 利用集值映射的二阶弱次微分 [10], 建立约束和无约束

集值优化问题强有效解的最优性必要条件和充分条件。

2 预备知识

在本文中, 除特别说明外, X, Y, Z 分别为 m 维、 n 维和 l 维的欧氏空间, C 和 D 分别是 Y 和 Z 的闭凸尖锥且 $\text{int} C$ 非空, $0_x, 0_y, 0_z$ 分别表示 X, Y, Z 的原点, $N(0_y)$ 表示 Y 的原点 0_y 的邻域基, $E \subset X$ 是非空的。称集合 $C^* = \{x^* \in Y^* : x^*(x) \geq 0, x \in C\}$ 是 C 的对偶锥, 其中 Y^* 是 Y 的拓扑对偶。

对于集合 $M \subseteq Y$, $\text{cl}M$ 、 $\text{cone}M$ 和 $\text{int} M$ 分别表示集合 M 的拓扑闭包、生成锥和拓扑内部, 其中

$$\text{cone}M = \{\lambda x : x \in M, \lambda > 0\}.$$

设 B 是凸锥 C 的一个非空凸子集, 如果 $C = \text{cone}B$ 且 $0_y \notin \text{cl}B$, 则称 B 是凸锥 C 的基。记

$$B^s = \{\phi \in Y^* : \exists t > 0, \text{s.t. } \langle b, \phi \rangle \geq t, \forall b \in B\}.$$

定义 2.1 [11] 设 Y 是一个实赋范空间, $C \subset Y$, B 是 C 的一个基, M 是 Y 的一个非空子集, 称 $y \in M$ 是 M 的一个强有效点。如果对任意的 $\phi \in Y^*$, 存在 $U, V \in N(0_y)$, 使得

$$\phi(\text{cl}(\text{cone}(M - y)) \cap (U - \text{cone}(V + B)))$$

是一个有界集。

用集合 $GE(M, C)$ 表示 M 所有的强有效点的集合。

引理 2.2 [12] 设 Y 为实赋范空间, B 是 C 的一个基, M 是 Y 的一个非空子集。则

$$GE(M, C) = GE(M + C, C).$$

定义 2.3 [1] 设 E 是一个凸集。称集值映射 $F: E \rightarrow Y$ 在 E 上是 C -凸的, 如果 $\forall x_1, x_2 \in E, \lambda \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} & \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \subset F(x_3) \\ & \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + C. \end{aligned}$$

定义 2.4 [13] 称集值映射 $F: E \rightarrow Y$ 在 E 上是广义 C -次似凸的, 如果存在 $\theta \in \text{int} C$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in E, \lambda \in (0, 1), \varepsilon > 0, \exists x_3 \in E, \eta > 0$, 满足

$$\varepsilon \theta + \lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) - \eta F(x_3) \subset C.$$

显然, C -凸集值映射一定是广义 C -次似凸集值映射, 反之结论不成立。

定义 2.5 [10] 设 $F: E \rightarrow Y$ 是集值映射, $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。若存在 $\varphi \in C^* \setminus \{0\}, \xi \in X^*, a \in R_+$, 使得 $\forall x \in E, y \in F(x)$, 有

$$\phi(y - y_0) \geq \langle \xi, x - x_0 \rangle^2 - a \|x - x_0\|^2,$$

则称 (ξ, φ, a) 是集值映射 F 在 (x_0, y_0) 处的一个二阶弱次梯度。

称集合

$$\begin{aligned} \partial_w^2 F(x_0, y_0) = & \{(\xi, \varphi, a) \in X^* \times C^* \setminus \{0\} \times R_+ : \varphi(y - y_0) \\ & \geq \langle \xi, x - x_0 \rangle^2 - a \|x - x_0\|^2, \forall x \in E, y \in F(x)\} \end{aligned}$$

为集值映射 F 在 (x_0, y_0) 处的二阶弱次微分。

如果 $\partial_w^2 F(x_0, y_0) \neq \emptyset$, 则称 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的。

3 最优性条件

3.1 无约束集值优化问题的最优性条件

设 $E \subset X$ 是非空的, $F: E \rightarrow Y$ 为一个集值映射。本文讨论如下无约束集值优化问题 (OP):

$$\begin{cases} \text{Min} & F(x), \\ \text{s.t.} & x \in E. \end{cases}$$

定义 3.1 [12] 设 $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。如果

$y_0 \in GE(F(E), C)$, 则称 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强有效解。

设 $\phi \in B^{st}$ 。考虑无约束复合优化问题 (COP):

$$\begin{cases} \text{Min} & \phi \circ F(x), \\ \text{s.t.} & x \in E. \end{cases}$$

定义 3.2 [14] 设 $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$, 如果

$$\phi(y_0) \leq \phi(y), \forall x \in E, y \in F(x),$$

则称 (x_0, y_0) 为复合优化问题 (COP) 的最优解。

引理 3.1 [12] 如果集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, 则 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的强有效解的充要条件是存在 $\phi \in B^{st}$, 使得 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解。

下面我们建立集值优化问题 (OP) 强有效解的最优性充分条件。

定理 3.1 如果集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且存在 $\varphi \in B^{st}, \xi \in X^*$, 使得

$$(\xi, \varphi, a) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), \forall a \in R_+,$$

则 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强有效解。

证明: 由于 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且 $(\xi, \varphi, a) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), \forall a \in R_+$, 故 $\forall x \in E, y \in F(x)$, 有

$$\varphi(y - y_0) \geq \langle \xi, x - x_0 \rangle^2 - a \|x - x_0\|^2, \forall a \in R_+ \quad (1)$$

于是, 在式(1)中取 $a = 0$, 可得

$$\phi(y - y_0) \geq \langle \xi, x - x_0 \rangle^2 \geq 0, \forall x \in E, y \in F(x),$$

因此

$$\phi(y) \geq \phi(y_0), \forall x \in E, y \in F(x),$$

故 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解。从而, 由集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的和引理 3.1 可知 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的强有效解。 (证毕)

定理 3.2 设 E 是一个凸集, $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。如果集值映射 F 在 E 上是 C -凸的, F 在 (x_0, y_0) 处是二阶

弱次可微的, 且存在 $\varphi \in B^{\text{st}}, \xi \in X^*$, 使得

$$(\xi, \varphi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0),$$

则 (x_0, y_0) 是问题 (OP) 的一个强有效解。

证明: 因为 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且 $(\xi, \varphi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0)$, 所以

$$\phi(y - y_0) \geq \langle \xi, x - x_0 \rangle^2 \geq 0, \forall x \in E, y \in F(x).$$

故

$$\phi(y) \geq \phi(y_0), \forall x \in E, y \in F(x),$$

于是 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解。

由于 C -凸集值映射一定是广义 C -次似凸的, 于是由引理 3.1 可知 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强有效解。 (证毕)

根据定理 3.1 和定理 3.2 的证明, 我们可以得到复合优化问题 (COP) 的最优性充分条件。

推论 3.1 如果集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且存在 $\varphi \in B^{\text{st}}, \xi \in X^*$, 使得

$$(\xi, \varphi, a) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), \forall a \in R_+,$$

则 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解。

推论 3.2 设 E 是一个凸集。如果集值映射 F 在 E 上是 C -凸的, F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且存在 $\varphi \in B^{\text{st}}, \xi \in X^*$, 使得

$$(\xi, \varphi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0),$$

则 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解。

接下来, 我们利用集值映射的二阶弱次梯度, 建立集值优化问题 (OP) 强有效解的最优性必要条件。

定理 3.3 设 $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。如果集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强有效解, 则 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且存在 $\phi \in B^{\text{st}}$, 使得对任意的非负数 c , 有

$$(0, \varphi, c) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0).$$

证明: 由于 (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强

有效解, 以及集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, 于是由引理 3.1 可知, 存在 $\phi \in B^{\text{st}}$, 使得 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解, 即

$$\phi(y) \geq \phi(y_0), \forall x \in E, y \in F(x),$$

于是对任意的非负数 c , 有

$$\phi(y - y_0) \geq 0 \geq \langle 0, x - x_0 \rangle^2 - c \|x - x_0\|^2,$$

$$\forall x \in E, y \in F(x),$$

故

$$(0, \varphi, c) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0),$$

于是 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的。 (证毕)

由于 C -凸集值映射一定是广义 C -次似凸的, 于是由定理 3.3 可以得到如下推论。

推论 3.3 设 E 是一个凸集, $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。如果集值映射 F 在 E 上是 C -凸的, (x_0, y_0) 是集值优化问题 (OP) 的一个强有效解, 则 F 在 (x_0, y_0) 处二阶弱次可微的, 且存在 $\phi \in B^{\text{st}}$, 使得对任意的非负数 c , 有

$$(0, \varphi, c) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0).$$

根据定理 3.3 的证明, 我们可以得到如下推论。

推论 3.4 设 $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0)$ 。如果集值映射 F 在 E 上是广义 C -次似凸的, 且存在 $\phi \in B^{\text{st}}$, 使得 (x_0, y_0) 是复合优化问题 (COP) 的最优解, 则 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的, 且使得对任意的非负数 c , 有

$$(0, \varphi, c) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0).$$

3.2 约束集值优化问题的最优性条件

设 $E \subset X$ 是非空的, $F: E \rightarrow Y$ 和 $G: E \rightarrow Z$ 为两个集值映射, 我们考虑如下约束集值优化问题 (CSP):

$$\begin{cases} \text{Min} & F(x), \\ \text{s.t.} & G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, \\ & x \in E. \end{cases}$$

约束集值优化问题 (CSP) 的可行域为

$$H = \{x \in E : G(x) \cap (-D) \neq \emptyset\}.$$

设 $\phi \in B^*$, 我们考虑如下约束复合优化问题 (CCSP):

$$\begin{cases} \text{Min} & \phi \circ F(x), \\ \text{s.t.} & G(x) \cap (-D) \neq \emptyset, x \in E. \end{cases}$$

受文献[15]中 Kuhn-Tucker 鞍点定义的启发, 给出约束集值优化问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点。

定义 3.3 设 $x_0 \in E, y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0), \phi \in C^* \setminus \{0\}, \psi \in D^*$ 。称 $((x_0, y_0, z_0), \phi, \psi)$ 为约束集值优化问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点, 如果对任意的 $z^* \in D^*, x \in E, y \in F(x), z \in G(x)$, 有

$$\phi(y_0) + z^*(z_0) \leq \phi(y_0) + \psi(z_0) \leq \phi(y) + \psi(z)。$$

定义 3.4 [12] 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0)$ 。如果 $y_0 \in GE(F(H), C)$, 则称 (x_0, y_0) 是约束集值优化问题 (CSP) 的一个强有效解。

定义 3.5 [15] 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0)$ 。称 (x_0, y_0) 为约束复合优化问题 (CCSP) 的最优解, 如果

$$\phi(y_0) \leq \phi(y), \quad \forall x \in H, y \in F(x)。$$

定理 3.4 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0), \phi \in B^*, \psi \in D^*$ 。如果集值映射 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, $((x_0, y_0, z_0), \phi, \psi)$ 为问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点, 则 (x_0, y_0) 是问题 (CSP) 的一个强有效解, 且 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的。

证明: 根据 Kuhn-Tucker 鞍点的定义可知: 对任意的 $z^* \in D^*, x \in E, y \in F(x), z \in G(x)$, 有

$$\phi(y_0) + z^*(z_0) \leq \phi(y_0) + \psi(z_0) \leq \phi(y) + \psi(z) \quad (2)$$

由于 z^* 的任意性, 不妨在式(2)中取其为 $\{0\}$ 和 2ψ , 可得 $\psi(z_0) = 0$ 。于是由式(2)可得对任意的 $x \in E, y \in F(x), z \in G(x)$, 有

$$\phi(y_0) \leq \phi(y) + \psi(z)。 \quad (3)$$

因为 $z^* \in D^*$, 所以 $\forall x \in H, \exists z' \in G(x) \cap (-D)$, 使得

$$z^*(z') \leq 0,$$

于是由式(3)可得

$$\phi(y_0) \leq \phi(y), \quad \forall x \in H, y \in F(x)。 \quad (4)$$

所以 (x_0, y_0) 为约束复合优化问题 (CCSP) 的最优解。由于集值映射 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, 于是由引理 3.1 可知 (x_0, y_0) 是问题 (CSP) 的一个强有效解。

由式(4)可得, 对任意的非负数 c , 有

$$\phi(y - y_0) \geq 0 \geq \langle 0, x - x_0 \rangle^2 - c \|x - x_0\|^2,$$

$$\forall x \in H, y \in F(x),$$

故

$$(0, \phi, c) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0),$$

于是 F 在 (x_0, y_0) 处是二阶弱次可微的。 (证毕)

定理 3.5 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0) \cap (-D)$ 。如果 F 和 G 分别在 (x_0, y_0) 和 (x_0, z_0) 处是二阶弱次可微的, 集值映射 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, 且存在 $\phi \in B^*, \psi \in D^*, \xi_1, \xi_2 \in X^*$, 使得

$$(\xi_1, \phi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), (\xi_2, \psi, 0) \in \partial_w^2 G(x_0, z_0),$$

$$\psi(z_0) = 0,$$

则 $((x_0, y_0, z_0), \phi, \psi)$ 为问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点, (x_0, y_0) 是问题 (CSP) 的一个强有效解。

证明: 因为 F, G 在 $\bar{x}$ 处均二阶弱次可微, 且

$$(\xi_1, \phi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), (\xi_2, \psi, 0) \in \partial_w^2 G(x_0, z_0),$$

所以

$$\phi(y - y_0) \geq \langle \xi_1, x - x_0 \rangle^2, \quad \forall x \in E, y \in F(x), \quad (5)$$

和

$$\psi(z - z_0) \geq \langle \xi_2, x - x_0 \rangle^2, \quad \forall x \in E, z \in G(x)。 \quad (6)$$

由于 $\langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle^2 \geq 0, i = 1, 2$, 故由式(5)和式(6)可得, 对任意的 $x \in E, y \in F(x), z \in G(x)$, 有

$$\phi(y_0) + \psi(z_0) \leq \phi(y) + \psi(z), \quad (7)$$

和

$$\phi(y_0) \leq \phi(y),$$

即 (x_0, y_0) 为问题 (CCSP) 的最优解。由于 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, 于是由引理 3.1 可知 (x_0, y_0) 是问题 (CSP) 的一个强有效解。

因为 $\psi(z_0) = 0$ 且 $z^*(z_0) \leq 0, \forall z^* \in D^*$, 所以

$$\varphi(y_0) + z^*(z_0) \leq \varphi(y_0) + \psi(z_0). \quad (8)$$

从而, 由式 (7) 和式 (8) 可得对任意的 $z^* \in D^*, x \in E, y \in F(x), z \in G(x)$, 有

$$\varphi(y_0) + z^*(z_0) \leq \varphi(y_0) + \psi(z_0) \leq \varphi(y) + \psi(z),$$

即 $((x_0, y_0, z_0), \phi, \psi)$ 为集值优化问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点。 (证毕)

根据定理 3.4 和定理 3.5 的证明, 易得约束复合优化问题 (CCSP) 最优解的充分条件。

推论 3.5 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0), \phi \in B^s, \psi \in D^*$ 。如果集值映射 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, $((x_0, y_0, z_0), \phi, \psi)$ 为问题 (CSP) 的 Kuhn-Tucker 鞍点, 则 (x_0, y_0) 为约束复合优化问题 (CCSP) 的最优解。

推论 3.6 设 $x_0 \in H, y_0 \in F(x_0), z_0 \in G(x_0) \cap (-D)$ 。如果 F 和 G 分别在 (x_0, y_0) 和 (x_0, z_0) 处是二阶弱次可微的, 集值映射 F 在 H 上是广义 C -次似凸的, 且存在 $\phi \in B^s, \psi \in D^*, \xi_1, \xi_2 \in X^*$, 使得

$$(\xi_1, \phi, 0) \in \partial_w^2 F(x_0, y_0), (\xi_2, \psi, 0) \in \partial_w^2 G(x_0, z_0),$$

$$\psi(z_0) = 0,$$

则 (x_0, y_0) 为约束复合优化问题 (CCSP) 的最优解。

4 结论

利用集值映射的二阶弱次微分, 建立了无约束和约束集值优化问题强有效解的几个最优性条件, 同时, 也获得了复合优化问题的几个最优性条件。下一步, 我们将考虑利用集值映射的二阶弱次微分, 构建集值优化问题的对偶模型, 并建立相应的对偶理论。

参考文献

- [1] R. T. Rockafellar, Convex analysis [M]. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1970.

- [2] A. Y. Azimov, R. N. Gasimov, On weak conjugacy, weak subdifferentials and duality with zero gap in nonconvex optimization [J], International Journal of Applied Mathematics, 1999, 1(2): 171-192.
- [3] R. Kasimbeyli, M. Mammadov, On weak subdifferentials, directional derivatives and radial epiderivatives for non-convex functions [J], SIAM Journal of Optimization, 2009, 20: 841-855. <https://doi.org/10.1137/080738106>
- [4] R. Kasimbeyli, M. Mammadov, Optimality conditions in non-convex optimization via weak subdifferentials [J], Non-linear Analysis, 2011, 74: 2534-2547. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.12.008>
- [5] G. Y. Chen and J. Jahn, Optimality conditions for set-valued optimization problems [J], Mathematical Methods of Operations Research, 1998, 48: 187-200. <https://doi.org/10.1007/s001860050021>
- [6] S. J. Li and X. L. Guo, Weak subdifferential for set-valued mappings and its applications [J], Nonlinear Analysis, 2009, 71: 5781-5789. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.04.065>
- [7] G. Inceoglu, Some properties of second-order weak subdifferentials [J], Turkish Journal of Mathematics, 2021, 45: 955-960. <https://doi.org/10.3906/mat-2010-22>
- [8] Y. W. Zhai, Q. L. Wang and T. Tang, Robust duality for robust efficient solutions in uncertain vector optimization problems [J], Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 2023, 40: 907-928. <https://doi.org/10.1007/s13160-022-00562-7>
- [9] Q. L. Wang and Y. S. Zhang, Second-order weak subdifferential of vector-valued maps and its applications to optimality conditions [J], Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2024, 25(8): 1853-1865.
- [10] T. Du, Q. L. Wang, R. Kasimbeyli, J. Yao, Second-order weak subdifferential of set-valued maps and its applications [J], Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 2025, 26(12): 3273-3288.
- [11] Y. H. Cheng, W. T. Fu, Strong efficiency in local convex space [J], Mathematical Methods of Operations Research, 1999, 50: 373-384. <https://doi.org/10.1007/s001860050076>
- [12] 武育楠, 戎卫东, 集值映射向量优化问题的强有效性 [J], 内蒙古大学学报 (自然科学版), 1999, 30 (4): 16-22.
- [13] 王政伟, 李泽民, 广义锥次似凸集值映射向量优化的 Benson 真有效性 [J], 工程数学学报, 2003, 20(6):14-20. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1005-3085.2003.06.003>
- [14] 王其林, 广义凸集值映射优化问题的强有效解 [J], 重庆交通大学学报 (自然科学版), 2007, 26 (4): 162-165. <https://doi.org/10.3969/j.issn.1674-0696.2007.04.041>

- [15] 王其林, 集值优化问题的强有效解与 Kuhn-Tucker 鞍点
[J]. 应用泛函分析学报, 2007, 9(2):176-179.