基于矩阵最小多项式求法的相关探讨

殷俊雅*，宋瑞，张菲菲

徐州市棠张镇实验小学，江苏徐州 221113

摘要：最小多项式是多项式理论的重要内容，作为 Cayley-Hamilton 定理的精细化延伸，其应用贯穿线性变换的结构、矩阵对角化、矩阵函数以及矩阵方程的求解等多个场景，是连接矩阵抽象结构与工程计算应用的关键纽带。为系统探讨其计算方法，首先从矩阵零化多项式与最小多项式的相关定义出发，给出了最小多项式的一些基本性质，由此探讨了矩阵最小多项式的几种求法，主要包括：*Jordan* 标准形法、不变因子法、分解-检验法、比较系数法和基础解系法；其次，对每种方法都给予了相应的证明，并分别举例说明其求解最小多项式时的有效性；最后，通过对比分析各类方法的计算复杂度、适用场景与精度边界，讨论其推广应用价值，可为后续快速匹配最小多项式求解方法、减少无效试算与冗余计算量提供理论依据。

关键词：最小多项式；零化多项式；性质；求法

DOI: 10.57237/j.wjms.2026.02.002

Discussion on the Calculation Method of Minimal Polynomial of Matrix

Yin Junya*, Song Rui, Zhang Feifei

Tangzhang Town Experimental Elementary School, Xuzhou 221113, China

Abstract: The minimal polynomial is an important subject in polynomial theory. As the refined extension of Cayley-Hamilton theorem, its applications run through various areas, including the structure of linear transformations, matrix diagonalization, matrix functions, and solution of matrix equations. It serves as a critical link connecting the abstract structure of matrices with engineering computation applications. To systematically explore the computational methods, based on the related definitions of annihilation polynomial and minimal polynomial of matrices, some basic properties of minimal polynomials are presented. Thus, several calculation methods of minimal polynomial are discussed. These methods mainly include standard form method of *Jordan*, invariant factor method, decomposition-verification method, comparison coefficient method and basic solution method. Then, each method is proved accordingly. And several examples are provided to illustrate the effectiveness of calculating methods. Finally, by comparing the computational complexity, applicable scenarios and accuracy bounds of various methods, the practical application value is discussed. This can provides the theoretical basis for rapidly matching solution methods of minimal polynomials, reducing invalid trial calculations, as well as redundant computational load in subsequent work.

Keywords: Minimal Polynomial; Annihilation Polynomial; Property; Calculation Method

基金项目：徐州市 2022 年度教师个人课题 (G221478)；徐州市教育教学规划课题 (GH14-21-L132).

*通信作者：殷俊雅，932362829@qq.com

收稿日期: 2026-09-09；接受日期: 2026-10-26；在线出版日期: 2026-11-14 http://www.wjoms.com

1 引言

多项式理论是代数学的核心内容之一，其研究对象不仅涵盖高次代数方程的求解与根的分布，还深入渗透到线性代数、泛函分析、数值计算乃至控制论等多个数学分支[1-3]。在矩阵理论中，特征多项式与最小多项式是刻画矩阵代数性质的两个基本工具。特征多项式由矩阵的阶数与特征值完全决定，而最小多项式则在特征值相同的前提下进一步反映了矩阵各特征值所对应的 *Jordan* 块结构，从而更精细地描述了矩阵的零化理想和极小性[4, 5]。具体而言，最小多项式是矩阵所有零化多项式中次数最低的首一多项式，它不仅是判定矩阵可对角化的简洁判据，也是构造矩阵函数(如矩阵指数、矩阵正弦)、求解线性矩阵微分方程及研究线性变换循环分解的重要载体。

长期以来，多数高等代数或矩阵论教材对于最小多项式的介绍，往往侧重于其定义和基本性质的陈述，例如零化多项式集合的不可约性、最小多项式与特征多项式的整除关系，以及它们在相似变换下的不变性[6-8]。然而，关于如何系统性地计算给定矩阵的最小多项式，教材中通常仅附带一两种典型方法，缺乏对各种解答的横向比较和适用条件分析。在实际教学与科研中，面对不同阶数、不同数域(如实数域、复数域或一般域)以及不同结构(如稀疏矩阵、分块矩阵、友矩阵等)的矩阵，选择合适的计算途径会显著影响求解效率和推导的简洁性。因此，有必要对现有最小多项式求法进行深入探讨，揭示每种方法背后的原理及其内在关联，从而为具体问题中的方法选取提供依据。

鉴于此，本文从最小多项式定义和基本性质出发，系统归纳了现有的主要求解途径：基于矩阵标准型的 Jordan 标准形法和不变因子法，基于定义构造的分解-检验法和比较系数法，以及利用循环子空间衍生的基础解系法。通过相关算例演示和证明，客观评估了各方法的计算复杂度和适用范围，旨在为实际教学和应用中合理选择求解方法提供参考。

2 符号与定义

记 $C^{n\times n}$ 为全体 $n\times n$ 复方阵组成的空间，$C(\lambda)$ 为复数域上多项式矩阵的全体，$\det(\lambda E-A)$ 为矩阵 $\lambda E-A$ 的行列式，$f(\lambda)\mid g(\lambda)$ 为多项式 $f(\lambda)$ 能整除多项式 $g(\lambda)$[9]。

定义 1 设 $A\in C^{n\times n}$ 且 $A\neq 0$，若存在非零多项式 $f(\lambda)\in C(\lambda)$，使 $f(A)=0$，则称 $f(A)$ 为 A 的零化多项式。

定义 2 在 A 的零化多项式中，次数最低且首项系数为 1 的多项式称为 A 的最小多项式，记为 $m(\lambda)$。

3 最小多项式的性质[10, 11]

性质 1 方阵的特征多项式是其零化多项式(Hamilton-Cayley 定理)。

性质 2 最小多项式能整除任一零化多项式。

性质 3 设 $m(\lambda)$ 为矩阵 A 的最小多项式，那么 $f(\lambda)$ 以为根当且仅当 $m(\lambda)$ 整除 $f(\lambda)$。

性质 4 一个 k 级 *Jordan* 块

$$J_k=\begin{bmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{bmatrix}_{k\times k}$$

的最小多项式为 $m_{J_k}(\lambda)=(\lambda-a)^k$。

性质 5 相似矩阵有相同的最小多项式。

4 最小多项式的求法

4.1 *Jordan* 标准形法

定理 1 设 A 是一个准对角矩阵，

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$$

，A 的最小多项式等于 A_i 的最小多项式的最小公倍式，$i=1,2,\cdots,s$ [12, 13]。

证明 设 A_i 的最小多项式为 $f_i(\lambda)$，A 的最小多项式为 $f(\lambda)$，$f_i(\lambda)$ 的最小公倍式是 $g(\lambda)$，由 $f_i(\lambda)$ 整除 $g(\lambda)$ 知 $g(A_i)=0$，$i=1,2,\cdots,s$。

故 $g(A)=\begin{bmatrix} g(A_1) & & & \\ & g(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(A_s) \end{bmatrix}=0$，由性质 3 知 $f(\lambda)|g(\lambda)$。

又因为

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & & & \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(A_s) \end{bmatrix}=0$$，故对每一个 i 都有 $f(A_i)=0$，即 $f_i(\lambda)\mid f(\lambda)$。而 $g(\lambda)$ 是 $f_i(\lambda)$ 的最小公倍式，故 $g(\lambda)\mid f(\lambda)$，综上可得 $g(\lambda)=f(\lambda)$。

由定理 1 的结论，若 A 是一个准对角矩阵，则只需求得 A_i，$i=1,2,\cdots,s$ 的最小多项式，便可求得 A 的最小多项式[14]。

例 1 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解 设 $A=\begin{bmatrix} J_1 & \\ & J_2 \end{bmatrix}$，$J_1$ 其中 $=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$J_2=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，利用性质 4，知 *Jordan* 矩阵 J_1 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2$，*Jordan* 矩阵 J_2 的最小多项式为 $(\lambda-2)^3$，所以由定理 1 可得 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^3$。

4.2 不变因子法

定理 2 n 阶方阵 A 的最小多项式是 A 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$[15]。

证明 对 n 阶方阵 A 来说必存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$，其中

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i}$$，$i=1,2,\cdots,s$，$\sum_{i=1}^{s} n_i=n$。由定理 1 知，A 的最小多项式为 J_i 的最小多项式的公倍式，由性质 4 知，$m_{J_i}(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$，$i=1,2,\cdots,s.$ 从而 $m_J(\lambda)=[(\lambda-\lambda_i)^{n_1},(\lambda-\lambda_i)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_i)^{n_s}]$，故 $m_A(\lambda)$ 为 A 的最小多项式。根据初等因子的定义及不变因子的性质：$d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,n-1)$ 知，$m_A(\lambda)\mid d_n(\lambda)$，又由最小公倍式定义得 $d_n(\lambda)\mid m_A(\lambda)$，且两者都是首项系数为 1 的，所以有 $m_A(\lambda)=d_n(\lambda)$。

由上述结论，只需把 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 化成标准形，求得 $d_n(\lambda)$，进而求得 A 的最小多项式。

例 2 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解 $\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & -1 \\ \lambda & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -(\lambda+1) \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & -(\lambda+1) & (\lambda-2)(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda+1) \end{bmatrix}$$，所以 $m(\lambda)=d_3(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+1)$。

4.3 分解-检验法

定理 3 设 $A\in C^{n\times n}$，将 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 标准分解式中含有 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$ 的因式，按次数从低到高的顺序进行检验[16]，第一个能零化 A 多项式就是 A 的最小多项式。

证明 由性质 1 及性质 2 知，矩阵 A 的最小多项式是特征多项式 $f(\lambda)$ 的因式，将 $f(\lambda)$ 作标准分解，找到 A 的所有特征值，设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$。对式 $f(\lambda)$ 的标准分解式中含有 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$ 的因式按次数从低到高的顺序进行检验，因最小多项式是使 $f(\lambda)=0$ 成立次数最低、首项系数为 1 的多项式，故按照上述方式，第一个能零化 A 多项式就是 A 的最小多项式。

由以上结论，通过计算矩阵的特征多项式，将其分解为 $(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_s)$ 的形式，并检验得到 A 的最小多项式。

例 3 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-3)(\lambda-2)^2$，所以 $m(\lambda)$ 有两种可能，即 $(\lambda-3)(\lambda-2)$ 和 $(\lambda-3)(\lambda-2)^2$，而

$$(A-3E)(A-2E)=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$=0$，所以 $m(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda-2)$。

4.4 比较系数法

定理 4 设矩阵方程 $A^k=a_0E+a_1A+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}$，依次令 $k=1,2,\cdots$，从相应的矩阵方程中求解 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1}。第一次有解时，解所对应的多项式 $m(\lambda)=-(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{k-1}\lambda^{k-1})$ 为矩阵 A 的最小多项式[17]。

证明 任取 $A\in C^{n\times n}$，在 n^2 维向量空间 $C^{n\times n}$ 中，n^2+1 个向量 E，A，A^2，$\cdots$，A^{n^2} 必定线性相关，设 k 是使序列 E，A，A^2，$\cdots$，A^{n^2} 线性相关的最小正整数，$k\le n^2$，则此时存在 $k+1$ 个不全为 0 的 b_0，b_1，$\cdots$，b_{k-1}，b_k，使得 $b_0E+b_1A+\cdots+b_{k-1}A^{k-1}+b_kA^k=0$。显然，$k\neq 0$，有 $A^k=-\frac{b_0}{b_k}E-\frac{b_1}{b_k}A-\cdots-\frac{b_{k-1}}{b_k}A^{k-1}$。记 $a_i=-\frac{b_i}{b_k}$，$i=0,1,\cdots,k-1$，

则 $A^k=a_0E+a_1A+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}$。由于 $m(\lambda)=0$，且由 k 的取法可以看出，k 具最小性，所以

$$m(\lambda)=-(a_0+a_1\lambda+\cdots+a_{k-1}\lambda^{k-1})+\lambda^k$$

为 A 的最小多项式。

根据以上定理的证明过程，实际上得到了求解最小多项式的另一种方法——比较系数法，即依次 $k=1,2,\cdots$，求矩阵方程 $A^k=a_0E+a_1A+\cdots+a_{k-1}A^{k-1}$ 中的 a_0，a_1，$\cdots$，a_{k-1} 直至有解，便得到矩阵 A 的最小多项式[18]。

例 4 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解 (1)试解 $A=a_0E$，显然关于 a_0 无解。

(2)试解 $A^2=a_0E+a_1A$，写出方程两边的矩阵，并选择某行或某列来解方程组以试求 a_0 和 a_1，方程组无解。

(3)再试解 $A^3=a_0E+a_1A+a_2A^2$，写出方程两边的矩阵，选择第一行解方程组得 $a_0=2$，$a_1=-5$，$a_2=4$。

所以 A 的最小多项式为 $m(\lambda)=-2+5\lambda-4\lambda^2+\lambda^3$。

4.5 基础解系法

定理 5 设 n 阶方阵 A 的秩为 r，x_{r+1}，$x_{r+2},\cdots$，x_n 为齐次方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，将 x_{r+1}，$x_{r+2},\cdots$，x_n 扩充为 C^n 的一组基 x_1，$x_2,\cdots$，x_r，x_{r+1}，$x_{r+2},\cdots$，x_n，设 $c_1(\lambda)$，$c_2(\lambda),\cdots$，$c_r(\lambda)$ 分别为 x_1，$x_2,\cdots$，x_r 关于矩阵 A 的最小多项式，则 $c_1(\lambda)$，$c_2(\lambda),\cdots$，$c_r(\lambda)$ 与 λ 的最小公倍式 $g(\lambda)$ 等于矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$。其中，定义使 $c(A)x=0$ 的次数最低且最高次幂系数为 1 的多项式 $c(\lambda)$ 为向量 x 关于矩阵 A 的最小多项式。

证明 因 $c_1(\lambda)$，$c_2(\lambda),\cdots$，$c_r(\lambda)$ 分别为 x_1，$x_2,\cdots$，x_r 关于矩阵 A 的最小多项式，则 $c_1(A)x_1=0$，$c_2(A)x_2=0,\cdots$，$c_r(A)x_r=0$，又 x_{r+1}，$x_{r+2},\cdots$，x_n 为齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax_{r+1}=0$，$Ax_{r+2}=0,\cdots$，$Ax_n=0$。因 x_1，$x_2,\cdots$，x_r，x_{r+1}，$x_{r+2},\cdots$，x_n 为向量空间 C^n 中的一组基，所以 C^n 中的任何一个向量 x 都能够被其线性表示，从而 $g(A)x=0$，式中向量 x 是任意的，这说明 $g(A)=0$，有 $m(\lambda)\mid g(\lambda)$。$m(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，则对任意向量 x，有 $m(A)x=0$，又 $g(\lambda)$ 是最小公倍式，所以 $g(\lambda)\mid m(\lambda)$。综上可得，$g(\lambda)=m(\lambda)$，得证。

例 5 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$ 的最小多项式。

解 解齐次线性方程组 $Ax=0$，得其一个基础解系 $x_1=(0,-1,1)^T$，添加向量 $x_2=(1,0,0)^T$，$x_3=(0,1,0)^T$ 构成向量空间 C^3 得一组基。下面求 $x_2=(1,0,0)^T$ 关于矩阵 A 的最小多项式，构造矩阵

$$B=\left(x_2,Ax_2,A^2x_2,A^3x_2\right)=\begin{bmatrix}1&2&5&14\\0&0&-1&-4\\0&-1&-3&-9\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&5&14\\0&-1&-3&-9\\0&0&1&4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-3\\0&0&1&4\end{bmatrix}$$，由向量组的相关知识，易知 x_2,Ax_2,A^2x_2 线性无关，而 x_2,Ax_2,A^2x_2，A^3x_2 线性相关，且 $3Ax_2-4A^2x_2+A^3x_2=0$，所以 $x_2=(1,0,0)^T$ 关于 A 的最小多项式 $f_2(\lambda)=3\lambda-4\lambda^2+\lambda^3$。

同样的方法可求得 $x_3=(0,1,0)^T$ 关于 A 的最小多项式为 $f_3(\lambda)=3\lambda-4\lambda^2+\lambda^3$，由定理 5 即得 A 的最小多项式 $m(\lambda)=g(\lambda)=[\lambda,f_2(\lambda),f_3(\lambda)]=[\lambda,\ \lambda^3-4\lambda^2+3\lambda,\ \lambda^3-4\lambda^2+3\lambda]=\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda$。

5 结论

通过对矩阵最小多项式求法的探讨，探讨了几种计算最小多项式的相关方法，并经对比发现：

(1)由于针对每个复数域上的矩阵，都可以相似于一个准对角形矩阵，即 *Jordan* 标准形，所以结合性质 5，利用 *Jordan* 标准形法求最小多项式也是证明中常用方法。

(2)不变因子法求解最小多项式，利用初等变换将矩阵化为标准形，转化成求解矩阵的最后一个不变因子，极具适用性，确有推广应用价值。

(3)分解-检验法和比较系数法均是从最小多项式的定义出发得到的求法，理论上它们同不变因子法一样具普有遍适用性，但有时复数域中特征多项式的分解具有相当的难度，况且随着矩阵阶数的增大，采用这两种方法进行求解，会造成计算量增加，且很不方便。

(4)基础解系法是通过讨论向量关于矩阵的最小多项式得到的求解矩阵最小多项式的另一种求法，较为新颖，涉及线性代数的知识较多，但计算量偏大，过程繁琐。

参考文献

[1] 安军. 关于高等代数多项式理论的教学探讨 [J]. 高等数学研究, 2021, 24(1): 63-67. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-1399.2021.01.019

[2] Kilmer S, Sun X P, Wright M. Strictly positive definite functions of finite orders and multivariate polynomial interpolation [J]. Journal of Approximation Theory, 2026, 315: https://doi.org/106283.10.1016/j.jat.2025.106283

[3] Noferini V, Van Dooren P. Root vectors of polynomial and rational matrices: Theory and computation [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2023, 656: 510-540. https://doi.org/10.1016/j.laa.2022.10.013

[4] 邓凯, 王小刚, 朱立军. 高等代数中多项式理论的教学实践与思考 [J]. 高师理科学刊, 2020, 40(5): 76-79. https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-9831.2020.05.017

[5] Castle B, Tran C M. Model theory of complex numbers with polynomial functions [J]. Selecta Mathematica-New Series, 2025, 31(5): 93. https://doi.org/10.1007/s00029-025-01086-x

[6] 谭宜家. 对角多项式矩阵的标准形及其应用 [J]. 大学数学, 2026, 42(3): 84-90. https://doi.org/10.3969/j.issn.1672-1454.2026.03.013

[7] Bik A, Draisma J, Snowden A. The geometry of polynomial representations in positive characteristic [J]. Mathematische Zeitschrift, 2025, 310(1): 13. https://doi.org/10.1007/s00209-025-03720-y

[8] Dai B B, Zhang R F. The polynomial function model in Born-Infeld theory [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2022, 37(3): 221-236. https://d.wanfangdata.com.cn/periodical/sxjk202203002

[9] 熊洪允, 曾绍标, 毛云英. 应用数学基础 (第 4 版) [M]. 天津: 天津大学出版社, 2015.

[10] 王萼芳, 石生明. 高等代数 (第 5 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[11] 蔡学鹏. 矩阵多项式的逆矩阵求解方法 [J]. 科技风, 2024, (14): 25-27. https://doi.org/10.19392/j.cnki.1671-7341.202414009

[12] 任芳国, 王甜甜. 关于矩阵多项式 Jordan 标准形刻画 [J]. 高等数学研究, 2024, 27(1): 18-21+117. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-1399.2024.01.007

[13] 陈影影. 最小多项式的性质及应用 [J]. 当代教育实践与教学研究, 2020, (5): 165-166. https://doi.org/10.16534/j.cnki.cn13-9000/g.2020.0565

[14] 安军. 最小多项式的一个重要性质的多种证法及应用 [J]. 高等数学研究, 2020, 23(1): 111-114. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-1399.2020.01.027

[15] 夏必腊. 方阵最小多项式的性质与求法 [J]. 高等数学研究, 2003, (3): 34-39. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-1399.2003.03.015

[16] 梁建秀, 武丽芬, 张雪霞. 高等代数中几类多项式的关联性及其应用 [J]. 晋中学院学报, 2023, 40(3): 28-31. https://doi.org/10.3969/j.issn.1673-1808.2023.03.006

[17] 许娟, 王颖. 矩阵多项式可逆的判断及求法 [J]. 高等数学研究, 2023, 26(1): 7-8+20. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-1399.2023.01.002

[18] 焦存德. 特征多项式与最小多项式相等的充要条件探究 [J]. 景德镇学院学报, 2020, 35(3): 113-116. https://doi.org/10.3969/j.issn.1008-8458.2020.03.031